

УДК 550.34

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛЫ В СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

**В. М. Павлов**

*Камчатская опытно-методическая сейсмологическая партия Геофизической службы РАН  
г. Петропавловск-Камчатский*

*Аннотация.* Предлагается методика расчета статических смещений от силы в упругом изотропном слоистом полупространстве. Использовано традиционное интегральное представление через (известные) горизонтальные функции, включающее в качестве неизвестных зависящие от глубины вертикальные функции — компоненты вектора движения-напряжения. Для вычисления векторов движения-напряжения предложен новый метод. По аналогии с динамическим случаем [2] вводится функция импеданса — «отношение» вектора напряжения к вектору движения. Введение импедансов позволяет получить аналитические формулы для компонент движения-напряжения, которые не содержат экспонент с положительными показателями, что позволяет использовать слои с любой толщиной. Для SH компонент импеданс — скалярная функция, для P/SV компонент — матрица второго порядка. Для вычисления интегралов по волновому числу, входящих в решение, вводится искусственная удаленная цилиндрическая граница. Это позволяет свести вычисление интегралов к вычислению рядов по наборам волновых чисел, выражающихся через корни функций Бесселя нулевого и первого порядков и расстояние до искусственной границы. Ошибка, связанная с заменой интегралов на ряды, порядка отношения («эпицентральное» расстояние)/(расстояние от «эпицентра» до искусственной границы). Предлагаемая методика численно устойчива и эффективна.

*Kamchatkan Methodical Seismological Department, Geophysical Service, RAS  
Petropavlovsk-Kamchatsky*

*Abstract.* A technique for calculation of static displacements from a force in a layered half-space is proposed. The conventional integral representation for solution through horizontal functions is used. This representation uses the components of stress-motion vectors as unknowns. To calculate the stress-motion vectors a new method is applied. By analogy with the dynamic case we introduce impedance functions, “ratios” of stress and motion vectors for SH and P/SV cases respectively. We use the impedance functions to get analytical formulas for stress-motion components that do not include exponent functions with positive arguments. Therefore layers of arbitrary thickness can be used. For the SH case the impedance is a scalar function whereas for P/SV case it is a second order matrix. To calculate the integrals with respect to wave number, that represent the solution, an artificial remote cylindrical boundary is introduced. This allows replacing the integrals by series with respect to sets of discrete wave numbers. The discrete wave numbers are calculated by the roots of Bessel functions of zero and first order and the distance to the artificial boundary. This approximation causes an error of order of the ratio (“epicentral” distance)/(distance to the artificial boundary from the “epicenter”). The technique is numerically stable and computationally efficient.

## Введение

Задача расчета статических смещений от силы в слоистом полупространстве приобрела особую актуальность в последнее время, когда появились измерения статических смещений поверхности земли с помощью спутниковой системы определения координат точек на поверхности земли.

Для однородного упругого полупространства задача имеет аналитическое решение (см., например, [8,9]). Для слоистого полупространства применяются численные (квазианалитические) методы [7, 13, 5,6]. Эти методы основаны на интегральном представлении решения, которое является следствием разделения переменных в уравнениях линейной теории упругости в цилиндрической системе координат. Коэффициенты ряда находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора движения-напряжения. Эта система решается с помощью метода Томсона-Хаскелла [11] или его модифицированных вариантов [12]. В работах [5,6] вместо интегрирования по волновому числу используется суммирование по дискретному набору равноотстоящих волновых чисел.

В данной работе реализован подход, который отличается от традиционного подхода в двух отношениях. Во-первых, интегралы по волновому числу заменяются суммами по дискретным наборам волновых чисел, значения которых выражаются через корни функций Бесселя нулевого и первого порядков, а, во-вторых, упомянутая выше система дифференциальных уравнений решается новым методом, в основе которого лежит понятие импеданса. Этот подход аналогичен подходу, развитому для динамики в работе [10].

Приводится решение задачи для силы, заданной на поверхности слоистого полупространства и приемника, расположенного внутри. Для того, чтобы получить решение для силы, действующей внутри полупространства и приемника на его поверхности применяется теорема взаимности.

## Постановка задачи

Рассмотрим горизонтально слоистую среду, состоящую из полупространства и лежащей на нем пачки из  $n$  слоев. Слой и полупространство считаются однородными, идеально упругими и изотропными.

Введем декартову систему координат, поместив ее начало  $O$  на внешней поверхности, направив ось  $Oz$  в среду перпендикулярно слоям, а оси  $Ox$  и  $Oy$  так, чтобы система координат  $Oxyz$  была правой. Положим, что источник в виде сосредоточенной силы находится на внешней границе в начале системы координат. Смещения необходимо определить в точке  $\mathbf{x}_s=(x_s, y_s, z_s)$  (приемник). Проведем горизонтальную плоскость через глубину приемника,  $z_s$ , и будем рассматривать ее как границу слоев; перенумеруем все границы с помощью индекса  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Обозначим глубины границ слоев через  $z_i$ , при этом  $z_1=0$  и обозначает внешнюю поверхность,  $z_s$  – глубину приемника. Под  $i$ -тым слоем будем подразумевать слой между плоскостями  $z_i$  и  $z_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ). Слой с индексом  $s-1$  и слой с индексом  $s$  (или полупространство, если  $s=n$ ) будут иметь одинаковые параметры. Каждый слой и полупространство характеризуется значениями параметров Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотности  $\rho$ .

Для каждого слоя и полупространства вектор смещения  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$  удовлетворяет во внутренних точках (т.е. в точках, не совпадающих с точками границ раздела и свободной поверхностью) однородному уравнению (см., например, [4])

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

где:

$\lambda, \mu$  - параметры Ламе слоя (полупространства);

$\Delta$  - оператор Лапласа;  
 $\nabla$  - оператор градиента;  
 $\nabla \cdot \mathbf{u}$  – дивергенция вектор-функции смещения  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ;  
 Сформулируем граничные условия.  
 На внешней границе имеем условие

$$\mathbf{T}(x,y,z_1+0) = -F\delta(x)\delta(y), \text{ при } z=z_1=0 \quad (2)$$

где:  $\mathbf{T}=\sigma \cdot \mathbf{n}$  – вектор напряжения на плоскости  $z=z_1$  ( $\mathbf{n}$  – нормаль к этой плоскости, направленная внутрь среды);

$\sigma$  - тензор напряжений;  
 $\delta(\cdot)$  - дельта-функция Дирака.

На остальных границах смещения и напряжения непрерывны:

$$[\mathbf{u}]_i=0, [\mathbf{T}]_i=0 \text{ при } z=z_i, (i=2,\dots,n) \quad (3)$$

Квадратные скобки обозначают скачок вектора на границе, а именно:

$$[\mathbf{v}]_i=\mathbf{v}(x,y,z_i+0) - \mathbf{v}(x,y,z_i-0) \quad (4)$$

– разность значений, принимаемых величиной на положительной и отрицательной стороне границы (положительная сторона имеет нормаль, направление которой совпадает с направлением оси  $Oz$ ). Кроме того,  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Как правило, требуется найти смещения на свободной поверхности от источника на глубине. Можно привести алгоритм решения этой задачи непосредственно. Однако, с методической точки зрения, удобнее рассмотреть задачу, когда источник всегда на поверхности, а приемник в глубинной точке. Решение первоначальной задачи, в этом случае, получим, применяя теорему взаимности. Приведем содержание этой теоремы (см., например, [1]).

Пусть  $U_{ij}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_s)$  –  $i$ -тая компонента вектора смещения в точке  $\mathbf{x}_0$  от силы, приложенной в точке  $\mathbf{x}_s$  в  $j$ -том направлении, тогда  $U_{ji}(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0)$  –  $j$ -тая компонента вектора смещения в точке  $\mathbf{x}_s$  от силы, приложенной в точке  $\mathbf{x}_0$  в  $i$ -том направлении, и верно равенство

$$U_{ij}(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0) = U_{ji}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_s) \quad (5)$$

### Формальное решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x) \quad (6)$$

с осями

$$\mathbf{e}_r = \cos(\varphi)\mathbf{i} + \sin(\varphi)\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\mathbf{i} + \cos(\varphi)\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \quad (7)$$

В цилиндрической системе координат уравнения теории упругости (1) допускают разделение переменных, и общее решение этих уравнений можно представить в виде (см., например, [1])

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \{l_1^{(m)}(z, k)\mathbf{T}_k^m + r_1^{(m)}(z, k)\mathbf{S}_k^m + r_2^{(m)}(z, k)\mathbf{R}_k^m\} k dk \quad (8)$$

где:

$$\mathbf{T}_k^m = \frac{1}{kr} \frac{\partial Y_k^m(r, \varphi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r - \frac{1}{k} \frac{\partial Y_k^m(r, \varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi \quad (9a)$$

$$\mathbf{S}_k^m = \frac{1}{k} \frac{\partial Y_k^m(r, \varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{kr} \frac{\partial Y_k^m(r, \varphi)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (9b)$$

$$\mathbf{R}_k^m = -Y_k^m(r, \varphi) \mathbf{e}_z \quad (9c)$$

$$Y_k^m(r, \varphi) = J_m(kr) \exp(im\varphi) \quad (9d)$$

$J_m$  - функция Бесселя  $m$ -того порядка.

Функции  $\mathbf{T}_k^m$ ,  $\mathbf{S}_k^m$ ,  $\mathbf{R}_k^m$  зависят только от горизонтальных переменных  $r$ ,  $\varphi$  и называются горизонтальными волновыми функциями. Коэффициенты  $l_1$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  выражаются через  $\mathbf{u}$  по формулам

$$l_1^{(m)}(z, k) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(r, \varphi, z) \cdot (\mathbf{T}_k^m(r, \varphi))^* r dr d\varphi \quad (10a)$$

$$r_1^{(m)}(z, k) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(r, \varphi, z) \cdot (\mathbf{S}_k^m(r, \varphi))^* r dr d\varphi \quad (10b)$$

$$r_2^{(m)}(z, k) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(r, \varphi, z) \cdot (\mathbf{R}_k^m(r, \varphi))^* r dr d\varphi \quad (10c)$$

Аналогично для вектора напряжений

$$\mathbf{T}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (l_2^{(m)}(z, k)\mathbf{T}_k^m + r_3^{(m)}(z, k)\mathbf{S}_k^m + r_4^{(m)}(z, k)\mathbf{R}_k^m) k dk \quad (11)$$

Коэффициенты  $l_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$  выражаются через  $\mathbf{T}$  по формулам, аналогичным (10)

$$l_2^{(m)}(z, k) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{T}(r, \varphi, z) \cdot (\mathbf{T}_k^m(r, \varphi))^* r dr d\varphi \quad (12a)$$

$$r_3^{(m)}(z, k) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{T}(r, \varphi, z) \cdot (\mathbf{S}_k^m(r, \varphi))^* r dr d\varphi \quad (12b)$$

$$r_4^{(m)}(z, k) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{T}(r, \varphi, z) \cdot (\mathbf{R}_k^m(r, \varphi))^* r dr d\varphi \quad (12c)$$

Векторы  $(l_1, l_2)^T, (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$  называются векторами движения-напряжения для SH- и P/SV-компонент решения соответственно [1]. Компоненты векторов движения-напряжения, при фиксированном волновом числе  $k$ , зависят только от глубины  $z$  и поэтому их естественно назвать вертикальными функциями. Вертикальные функции  $l_i$  ( $i=1,2$ ) и  $r_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) удовлетворяют независимым системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В пределах фиксированного слоя или полупространства имеем (см., например, [1], формулы (7.24), (7.28) при  $\omega=0$ )

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu \\ k^2\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 1/\mu & 0 \\ -k\lambda/(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 1/(\lambda+2\mu) \\ 4k^2\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & k\lambda/(\lambda+2\mu) \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad (14)$$

где:  $\lambda, \mu$  - параметры Ламе слоя (полупространства);  
 $k$  - волновое число.

Функции  $l_i$  ( $i=1,2$ ) и  $r_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) удовлетворяют следующим условиям, вытекающим из условий на смещения и напряжения.

На внешней поверхности (при  $z=z_1$ ) из формул (2), (12) имеем

$$l_2^{(m)} = i(F_x - i m F_y) / 2, \quad (m = \pm 1) \quad (15a)$$

$$r_3^{(m)} = (-m F_x + i F_y) / 2, \quad (m = \pm 1) \quad (15b)$$

$$r_4^{(m)} = F_z, \quad (m = 0) \quad (15c)$$

где  $m$  - угловой индекс (см. формулу (9d)); при  $m$ , отличных от -1, 0, 1 соответствующие величины равны нулю.

На границах раздела среды имеем условия непрерывности

$$[l_1]_i = 0, [l_2]_i = 0, \quad (16a)$$

$$[r_1]_i = 0, [r_2]_i = 0, [r_3]_i = 0, [r_4]_i = 0, \quad \text{при } z = z_i, (i > 1)$$

На бесконечности отсутствует движение

$$l_1 \rightarrow 0, r_1 \rightarrow 0, r_2 \rightarrow 0, \text{ при } z \rightarrow \infty \quad (16b)$$

Рассмотрим схему решения уравнений (13), (14) при условиях (15), (16). Для дальнейшего введем импедансы P/SV- и SH- векторов движения-напряжения. Задача нахождения векторов движения-напряжения решается в два этапа. На первом нахо-

дятся импедансы, на втором с помощью импедансов находятся вектора движения-напряжения.

Импеданс – это функция, умножая на которую вектор движения, получаем вектор напряжения. Для случая P/SV-системы, импеданс является матричной функцией. Обозначим через  $H^l(z)$  импеданс для SH-волн, а через  $\mathbf{H}^r(z)$  - импеданс для P/SV - системы. Имеем, для SH

$$l_2(z) = H^l(z) l_1(z), \quad (17)$$

для P/SV

$$\mathbf{s}(z) = \mathbf{H}^r(z) \mathbf{d}(z), \quad (18)$$

где  $\mathbf{d} = (r_1, r_2)^T$  – вектор движения, а  $\mathbf{s} = (r_3, r_4)^T$  – вектор напряжения для P/SV, а  $\mathbf{H}^r(z)$  квадратная матрица порядка 2.

Импедансы удовлетворяет следующим условиям:

$$1). [H^l]_i = 0, [\mathbf{H}^r]_i = 0, (i=2, \dots, n), \quad (19a)$$

2). При  $z = z_n + 0$  (т.е. со стороны полупространства) импедансы известны, а именно

$$H^l(z) = H_n^l, \quad \mathbf{H}^r(z) = \mathbf{H}_n^r \quad (19b)$$

где:

$$H_n^l = -k\mu_n \quad (19c)$$

$$\mathbf{H}_n^r = -\frac{2k\mu_n}{1 + \xi_n} \begin{pmatrix} 1 & \xi_n \\ \xi_n & 1 \end{pmatrix}, \quad (19d)$$

$\xi_n = \mu_n / (\lambda_n + 2\mu_n)$ ,  $k$  - волновое число.

Справедливость формул (19) устанавливается в Приложении.

Условия (19) однозначно определяют импедансы. Расчет импедансов ведется последовательно с нижней границы слоя на его верхнюю границу, начиная с самой нижней границы (с полупространством), где их значения известны. В результате будут определены значения импедансов на внешней границе.

Приведем формулы, выражающие значения импедансов на верхней границе слоя (кровле) через их значения на нижней границе (подошве). Их вывод дан в Приложении.

В пределах  $j$ -того слоя, справедливы следующие выражения, связывающие импедансы для различных глубин (при  $z_2 \geq z_1$ ). Имеем для SH

$$H^l(z_1) = k\mu \frac{-k\mu + H^l(z_2) + (k\mu + H^l(z_2)) \exp(-2kh)}{k\mu - H^l(z_2) + (k\mu + H^l(z_2)) \exp(-2kh)} \quad (20)$$

где  $h = z_2 - z_1 > 0$ .

Для P/SV формула такова

$$\mathbf{H}^r(z_1) = (\mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22} \mathbf{H}^r(z_2)) (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12} \mathbf{H}^r(z_2))^{-1} \quad (21)$$

где:

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{L}_{11}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{11} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{12}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{21} \quad (22a)$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{L}_{11}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{12} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{12}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{22} \quad (22b)$$

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{L}_{21}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{11} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{22}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{21} \quad (22c)$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{L}_{21}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{12} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{22}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{22} \quad (22d)$$

$\mathbf{B}(z)$  – матричная функция, образом которой является квадратная  $2 \times 2$  матрица

$$\mathbf{B}(z) = \begin{pmatrix} 1 & kz \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{L}_{ij}$ ,  $\mathbf{M}_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) – квадратные  $2 \times 2$  матрицы, такие что

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\xi)/2 & (1+\xi)/2 & (\xi-1)/2 & 1/2 \\ (\xi-1)/2 & 0 & (\xi-1)/2 & -\xi/2 \\ k\mu(1-\xi) & k\mu & k\mu(1-\xi) & k\mu(\xi-1) \\ k\mu(\xi-1) & -k\mu\xi & k\mu(1-\xi) & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \mu/(\lambda + 2\mu) \quad (23a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi/(\xi-1) & 1/(\xi-1) & 0 & (1+\xi)/(\xi-1)/k/\mu/2 \\ 1 & 1 & 1/k/\mu/2 & k/\mu/2 \\ 0 & -1 & -\xi/(\xi-1)/k/\mu/2 & -1/(\xi-1)/k/\mu/2 \\ 1 & -1 & -1/k/\mu/2 & 1/k/\mu/2 \end{pmatrix} \quad (23b)$$

Для расчета векторов движения-напряжения необходимо знать значения импедансов на границах раздела и на внешней границе. Схема расчета импедансов состоит в последовательном пересчете импедансов с применением формул (19), (20) и (21) при продвижении от границы полупространства вверх к внешней границе

$$H(z_n) = H_n \rightarrow H(z_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow H(z_1=0)$$

Перейдем к расчету векторов движения-напряжения. На внешней границе, согласно условиям (15), известны компоненты напряжения соответствующих векторов. Компоненты смещения на внешней границе находится по формулам, являющихся следствием формул (17) и (18). Для SH

$$l_1(z_1) = l_2(z_1)/H^r(z_1), \quad (24a)$$

для P/SV

$$\begin{pmatrix} r_1(z_1) \\ r_2(z_1) \end{pmatrix} = (\mathbf{H}^r(z_1))^{-1} \begin{pmatrix} r_3(z_1) \\ r_4(z_1) \end{pmatrix} \quad (24b)$$

Компоненты смещения на глубине  $z_s$  находится по формулам (вывод в Приложении)

$$l_1(z_s) = q(z_s, z_{s-1}) \dots q(z_3, z_2) q(z_2, z_1) l_1(z_1), \quad (25a)$$

где:

$$q(z_{p+1}, z_p) = \frac{2k\mu_p}{k\mu_p - H^l(z_{p+1}) + (k\mu_p + H^l(z_{p+1})) \exp(-2k(z_{p+1} - z_p))}, \quad (25b)$$

Для P/SV

$$\begin{pmatrix} r_1(z_s) \\ r_2(z_s) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(z_s, z_{s-1}) \dots \mathbf{Q}(z_3, z_2) \mathbf{Q}(z_2, z_1) \begin{pmatrix} r_1(z_1) \\ r_2(z_1) \end{pmatrix}, \quad (25c)$$

где:

$$\mathbf{Q}(z_{p+1}, z_p) = \exp(-k(z_{p+1} - z_p)) (\mathbf{R}_{11}^{(p)} + \mathbf{R}_{12}^{(p)} \mathbf{H}^r(z_p))^{-1}, \quad (25d)$$

Матрицы  $\mathbf{R}_{11}^{(p)}$ ,  $\mathbf{R}_{12}^{(p)}$  - это  $\mathbf{R}_{11}$ ,  $\mathbf{R}_{12}$  матрицы для  $p$ -го слоя. Выражения для них даны формулами (22).

Компоненты напряжений получаются умножением компонент смещений на соответствующие импедансы.

Объединяя формулы (24), (25) получим окончательные выражения для коэффициентов ряда (8) через компоненты напряжения на внешней границе

$$l_1(z_s) = q(z_s, z_1) / H^l(z_1) l_2(z_1) \quad (26a)$$

$$\begin{pmatrix} r_1(z_s) \\ r_2(z_s) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(z_s, z_1) (\mathbf{H}^r(z_1))^{-1} \begin{pmatrix} r_3(z_1) \\ r_4(z_1) \end{pmatrix} \quad (26b)$$

где:

$$q(z_s, z_1) = q(z_s, z_{s-1}) \dots q(z_3, z_2) q(z_2, z_1) \quad (26c)$$

$$\mathbf{Q}(z_s, z_1) = \mathbf{Q}(z_s, z_{s-1}) \dots \mathbf{Q}(z_3, z_2) \mathbf{Q}(z_2, z_1), \quad (26d)$$

выражения для  $q(z_{p+1}, z_p)$  и  $\mathbf{Q}(z_p, z_{p-1})$  даны формулами (25).

### Выражение решения через базисные функции

Приведенные формулы позволяют рассчитать значения компонент векторов движения для каждого набора  $(m, k)$ . Согласно (15) ненулевой вклад в решение (8) дают члены с  $m = -1, 0, 1$ . Кроме того, поскольку в формулы (24-26) значение  $m$  входит через граничные условия (15), а при  $m = \pm 1$  значения  $k_j^{(m)}$  совпадают, то в этом случае коэффициенты  $l_1^{(m)}$ ,  $r_1^{(m)}$ ,  $r_2^{(m)}$  при  $m = \pm 1$  могут быть выражены через одни и те же величины. Для каждого из этих значений мы введем (базисные) функции, через которые, в конечном счете, выразим смещение (8).

Покажем, что решение (8) можно представить в виде

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = \mathbf{u}^{(0)} F_z + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(1)} e^{i\varphi} (F_x - iF_y) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(-1)} e^{-i\varphi} (F_x + iF_y) \quad (27)$$



где верхний индекс соответствует значению  $m$ , величины  $F_x, F_y, F_z$  – компоненты силы в декартовой системе координат, а функции  $\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(-1)}$  имеют цилиндрические компоненты, не зависят от переменной  $\varphi$ . Причем функция  $\mathbf{u}^{(-1)}$  выражается через функцию  $\mathbf{u}^{(1)}$ , а именно между компонентами в цилиндрической системе координат имеется следующая связь

$$u_{1r}^{(-1)} = u_{1r}^{(1)}, \quad u_{1\varphi}^{(-1)} = -u_{1\varphi}^{(1)}, \quad u_{1z}^{(-1)} = u_{1z}^{(1)} \quad (28)$$

Рассмотрим случай  $m=0$  и определим функцию  $\mathbf{u}^{(0)}$ . Так как на внешней границе  $l_2=0$  при  $m=0$  (см. пояснение к формулам (15)), то  $l_1=0$  и  $l_2=0$ . При каждом  $k$  для коэффициентов  $r_1-r_4$  возникает задача с граничным условием

$$r_3(z_1, k)=0, \quad r_4(z_1, k)=F_z \quad (29)$$

Найдем базисное решение, отвечающее граничному условию

$$\begin{pmatrix} r_3^{(0)}(z_1, k) \\ r_4^{(0)}(z_1, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Применяя формулы (24-26) найдем коэффициенты смещений  $r_1, r_2$  при  $z=z_s$ , которые обозначим  $r_1^0, r_2^0$ , а по ним определим функцию  $\mathbf{u}^{(0)}$  в соответствии с (8)

$$\mathbf{u}^{(0)}(r, z_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{r_1^0(z_s, k)\mathbf{S}_k^0(r) + r_2^0(z_s, k)\mathbf{R}_k^0(r)\} k dk \quad (31)$$

В силу линейности решением исходной задачи, отвечающей граничному условию (29) будет функция  $\mathbf{u}^{(0)}F_z$ .

Рассмотрим случай  $m=1$  и определим функцию  $\mathbf{u}^{(1)}$ . Для коэффициентов  $l_1, l_2, r_1-r_4$  имеем задачу с граничным условием:

$$l_2^{(1)}(z_1, k) = i(F_y - iF_x)/2, \quad (32)$$

$$r_3^{(1)}(z_1, k) = -(F_y - iF_x)/2, \quad r_4(z_1, k) = 0 \quad (33)$$

Аналогично случаю  $m=0$ , найдем базисное решение, отвечающее граничному условию

$$l_2^{(1)}(z_1, k) = 1, \quad \begin{pmatrix} r_3^{(1)}(z_1, k) \\ r_4^{(1)}(z_1, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Применяя формулы (24-26) найдем коэффициенты смещений  $l_1, r_1, r_2$  при  $z=z_s$ , которые обозначим через  $l_1^1, r_1^1, r_2^1$ , а по ним определим функцию  $\mathbf{u}^{(1)}$  формулой

$$\mathbf{u}^{(1)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{i l_1^1 \mathbf{T}_k^1 - r_1^1 \mathbf{S}_k^1 - r_2^1 \mathbf{R}_k^1\} k dk e^{-i\varphi} \quad (35)$$

Тогда решением задачи (32), (33), в силу линейности и независимости решений P/SV и SH систем, будет  $\frac{1}{2} \mathbf{u}^{(1)} e^{i\varphi} (F_x - iF_y)$ .

Рассмотрим случай  $m=-1$  и определим функцию  $\mathbf{u}^{(-1)}$ . Для коэффициентов  $l_1, l_2, r_1, r_4$  имеем задачу с граничным условием (при каждом  $k$ ):

$$l_2^{(1)}(z_1, k) = i(F_x + iF_y) / 2, \quad (36)$$

$$r_3^{(1)}(z_1, k) = (F_x + iF_y) / 2, \quad r_4(z_1, k) = 0 \quad (37)$$

Решением этой задачи будет

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{i l_1^1 \mathbf{T}_k^{(-1)} + r_1^1 \mathbf{S}_k^{(-1)} + r_2^1 \mathbf{R}_k^{(-1)}\} k dk (F_x + iF_y)$$

где  $l_1^1, r_1^1, r_2^1$  те же, что и в формуле (35). Это объясняется тем, что значение  $m$  явно не входит в уравнения для векторов движения-напряжения. Определим функцию  $\mathbf{u}^{(-1)}$  формулой

$$\mathbf{u}^{(-1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{i l_1^1 \mathbf{T}_k^{(-1)} + r_1^1 \mathbf{S}_k^{(-1)} + r_2^1 \mathbf{R}_k^{(-1)}\} k dk e^{i\varphi} \quad (38)$$

тогда решение задачи (36), (37) примет вид  $\frac{1}{2} \mathbf{u}^{(-1)} e^{i\varphi} (F_x + iF_y)$ . Сравнивая цилиндрические компоненты вектор-функций  $\mathbf{u}^{(1)}$  и  $\mathbf{u}^{(-1)}$  в выражениях (35) и (38), приходим к формулам (28).

Запишем формулы (31), (35), (38), переходя к цилиндрическим компонентам

$$\mathbf{u}^{(0)} = A_r^{(0)} \mathbf{e}_r + A_\varphi^{(0)} \mathbf{e}_\varphi + A_z^{(0)} \mathbf{e}_z \quad (39)$$

(поперечная компонента тождественно равна нулю)

$$\mathbf{u}^{(1)} = A_r^{(1)} \mathbf{e}_r + iA_\varphi^{(0)} \mathbf{e}_\varphi + A_z^{(1)} \mathbf{e}_z \quad (40)$$

(поперечная компонента чисто мнимая)

$$\mathbf{u}^{(-1)} = A_r^{(1)} \mathbf{e}_r - iA_\varphi^{(0)} \mathbf{e}_\varphi + A_z^{(1)} \mathbf{e}_z \quad (41)$$

Функции  $A_p^{(m)}$ , ( $m = 0, 1; p = r, \varphi, z$ ) зависят от  $r, z_s$ , но не зависят от  $\varphi$ , и выражаются по формулам

$$A_r^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r_1^{(0)}(z_s, k) J_1(kr) k dk, \quad A_z^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r_2^{(0)}(z_s, k) J_0(kr) k dk \quad (42)$$

$$A_r^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ l_1^{(1)}(z_s, k) \frac{J_1(kr)}{kr} + r_1^{(1)}(z_s, k) J_1'(kr) \right\} k dk \quad (43)$$

$$A_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ l_1^{(1)}(z_s, k) J_1'(kr) + r_1^{(1)}(z_s, k) \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} k dk \quad (44)$$

$$A_z^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r_2^{(1)}(z_s, k) J_1(kr) k dk \quad (45)$$

Будем называть эти функции базисными, также как и соответствующие вектор-функции (39-41).

### Решение задачи о силе, приложенной внутри среды

Пусть сила приложена в точке  $\mathbf{x}_s$ , а смещение требуется найти в точке  $\mathbf{x}_0$  на свободной поверхности. Для решения этой задачи воспользуемся решением предыдущей, когда сила приложена в точке  $\mathbf{x}_0$ , а смещение было рассчитано в точке  $\mathbf{x}_s$ , и применим теорему взаимности (5).

Запишем формулу (27) в матричном виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{F} \quad (46)$$

где:

$\mathbf{G}(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0)$  - матрица, составленная из столбцов

$$\frac{1}{2} (\mathbf{u}^{(1)} e^{i\varphi} + \mathbf{u}^{(-1)} e^{-i\varphi}), \quad -\frac{i}{2} (\mathbf{u}^{(1)} e^{i\varphi} - \mathbf{u}^{(-1)} e^{-i\varphi}), \quad \mathbf{u}^{(0)} \quad (47)$$

$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$  - вектор-столбец.

Матрица  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0)$  представляет тензор Грина для силы в точке  $\mathbf{x}_0$  и приемника в точке  $\mathbf{x}_s$ . Матрицу можно записать через базисные функции с помощью формулы

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}(\varphi) \mathbf{U} \mathbf{A}^T(\varphi) \quad (48)$$

где:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A_r^{(1)} & 0 & A_r^{(0)} \\ 0 & A_\varphi^{(1)} & 0 \\ A_z^{(1)} & 0 & A_z^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Угол  $\varphi$  – это, по существу, азимут из точки  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, 0)$  в точку  $\mathbf{x}'_s = (x_s, y_s, 0)$ .

Будем теперь считать, что сила приложена в точке  $\mathbf{x}_s$ , а смещения будем рассматривать в точке  $\mathbf{x}_0$ . Применяя теорему взаимности (5), получим

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{F} \quad (50a)$$

где:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_s) = \mathbf{G}^T(\mathbf{x}_s; \mathbf{x}_0) \quad (50b)$$

Кроме того, заменим угол  $\varphi$  на угол  $\varphi_s$  – азимут из «эпицентра»  $\mathbf{x}'_s = (x_s, y_s, 0)$  на «приемник»  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ , при этом  $\varphi_s = \varphi + \pi$ . После преобразования, окончательно получаем

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_s) = \mathbf{A}(\varphi_s) \mathbf{U}_1 \mathbf{A}^T(\varphi_s) \quad (51)$$

$$\text{где: } \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} A_r^{(1)} & 0 & -A_z^{(1)} \\ 0 & A_\varphi^{(1)} & 0 \\ -A_r^{(0)} & 0 & A_z^{(0)} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Формулы (50-52) решают поставленную задачу.

#### Введение удаленной цилиндрической границы и дискретизация интегралов по волновому числу

Как следует из полученного в предыдущем разделе представления для смещений (8), необходимо вычислить определенные интегралы по волновому числу. Мы будем следовать работе [2], в которой применяется прием, позволяющий заменить вычисление интегралов вычислением сумм. Для того чтобы сделать это вводится цилиндрическая граница  $r=r_a$ , на которой задаются подходящие граничные условия.

Для того, чтобы задать граничные условия на цилиндрической границе, введем новые переменные

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\varphi)}{\partial r}, \quad v_z = u_z \quad (53)$$

где  $u_r, u_\varphi, u_z$  - компоненты вектора смещения в цилиндрической системе координат. Положим на цилиндрической границе

$$v_r|_{r=r_a} = 0, \quad v_\varphi|_{r=r_a} = 0, \quad v_z|_{r=r_a} = 0 \quad (54)$$

Тогда справедливо следующее представление для искомого решения

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-1}^1 \sum_{j=1}^{\infty} \{I_1^{(m)} \mathbf{T}_j^m + r_1^{(m)} \mathbf{S}_j^m + r_2^{(m)} \mathbf{R}_j^m\} / W_j^{(m)} \quad (55)$$

где  $\mathbf{T}_j^{(m)}, \mathbf{S}_j^{(m)}, \mathbf{R}_j^{(m)}$  - значения горизонтальных волновых функций  $\mathbf{T}_k^{(m)}, \mathbf{S}_k^{(m)}, \mathbf{R}_k^{(m)}$  при  $k = k_j^{(m)}, k_j^{(m)}$  - ненулевые корни уравнения

$$J_m(xr_a) = 0 \quad (56)$$

$$W_j^{(m)} = \frac{r_a^2}{2} (J'_m(k_j^{(m)} r_a))^2 \quad (57)$$

(штрих обозначает производную по аргументу). Коэффициенты разложения (55) связаны со смещением формулами

$$l_1^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}_{k_j^{(m)}}^m)^* r dr d\varphi \quad (58a)$$

$$r_1^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}_{k_j^{(m)}}^m)^* r dr d\varphi \quad (58b)$$

$$r_2^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{R}_{k_j^{(m)}}^m)^* r dr d\varphi \quad (58c)$$

Для того, чтобы обосновать разложение (55), воспользуемся теоремой разложения в ряд скалярных функций с использованием конечного преобразования Фурье-Бесселя (см., например, [3]). При выполнении условий (54) имеем

$$v_p(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-1}^1 e^{im\varphi} \sum_{j=1}^{\infty} v_p^{(m)}(z, k_j^{(m)}) J_m(k_j^{(m)} r) / W_j^{(m)}, \quad (p = r, \varphi, z) \quad (59)$$

где:

$$v_p^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} v_p(r, \varphi, z) J_m(k_j^{(m)} r) r dr e^{-im\varphi} d\varphi \quad (60)$$

При необходимости, интегрируя по частям, из формул (53), (60) получаем

$$v_r^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = -k_j^{(m)} r_1^{(m)}, \quad v_\varphi^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = -k_j^{(m)} l_1^{(m)}, \quad v_z^{(m)}(z, k_j^{(m)}) = -r_2^{(m)} \quad (61)$$

Если мы подставим разложение (55) в формулы (53) (предварительно отделив цилиндрические компоненты), то с учетом уравнения Бесселя, разложения (59) и формул (61), получим тождественное равенство. Строго говоря, следовало бы добавить в (55) член, который отвечает нулевым значениям введенных переменных, но в случае статики он равен нулю.

Соотношения (10), (12) сохраняют силу при замене  $k = k_j^{(m)}$  и использовании верхнего предела  $r_a$  вместо бесконечности. С учетом этих двух условий остаются справедливыми и все приведенные выше формулы. Свойство ортогональности функций  $\mathbf{T}_k^{(m)}$ ,  $\mathbf{S}_k^{(m)}$ ,  $\mathbf{R}_k^{(m)}$ , необходимое для их вывода, сохраняется.

Все это означает, что решать системы движения напряжения нужно для корней уравнения (56), а встречающиеся интегралы заменять по правилу

$$\int_0^{\infty} \Phi^{(m)}(k) k dk = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{(m)}(k_j^{(m)}) / W_j^{(m)}, \quad (m=0,1) \quad (62)$$

При численных расчетах бесконечный ряд (62) заменяется конечной суммой. Число  $n$  членов суммы определяется из условия

$$\text{abs}(C_{n+1}) < \varepsilon \text{abs}(S_n) \quad (63)$$

где:  $C_{n+1}$  –  $n+1$ -ый член ряда;  $\varepsilon$  – малое число (например, 0,001);  $S_n$  – сумма  $n$  членов ряда.

Введение цилиндрической границы приводит к тому, что решение в виде бесконечного ряда, будет приближенным. Возникающая при этом погрешность будет порядка  $R/r_a$ , ( $R$  – расстояние от источника до приемника) и может быть сделана достаточно малой за счет увеличения  $r_a$ .

На рис.1 приведены результаты расчета базисных функций для однородного полупространства и для слоя (толщины 1 км) на полупространстве. Значения параметров среды выражены в терминах скоростей продольных  $a$  и поперечных  $\beta$  волн, а также плотности  $\rho$ . Однородное полупространство имеет те же значения параметров, что и полупространство со слоем. Расчет для полупространства был проверен по формулам работы [8]. Расхождение не превышает 1%. При расчетах было принято значение  $r_a = 200R_{max}$ .

### Заключение

Получены аналитические формулы для расчета статических смещений в слоистой среде от точечной силы. Предложен новый способ решения системы дифференциальных уравнений для векторов движения-напряжения. В основе этого способа введение импедансов – матричной для P/SV- и скалярной для SH-векторов движения-напряжения функций, с помощью которых вектор напряжения выражается в виде произведения соответствующего импеданса на вектор движения. Задача расчета векторов движения-напряжения разбивается на две. Сначала рассчитываются импедансы, а затем с их помощью вектора движения-напряжения. Для тех и других получаются аналитические формулы. Отличительной особенностью данного подхода является то, что полученные формулы не содержат экспонент с положительными вещественными показателями, что дает возможность строить алгоритм расчета лишенный численной неустойчивости. Кроме того, этот алгоритм не содержит ограничений на толщину слоя, что выгодно отличает его от других подобных алгоритмов.

### Приложение

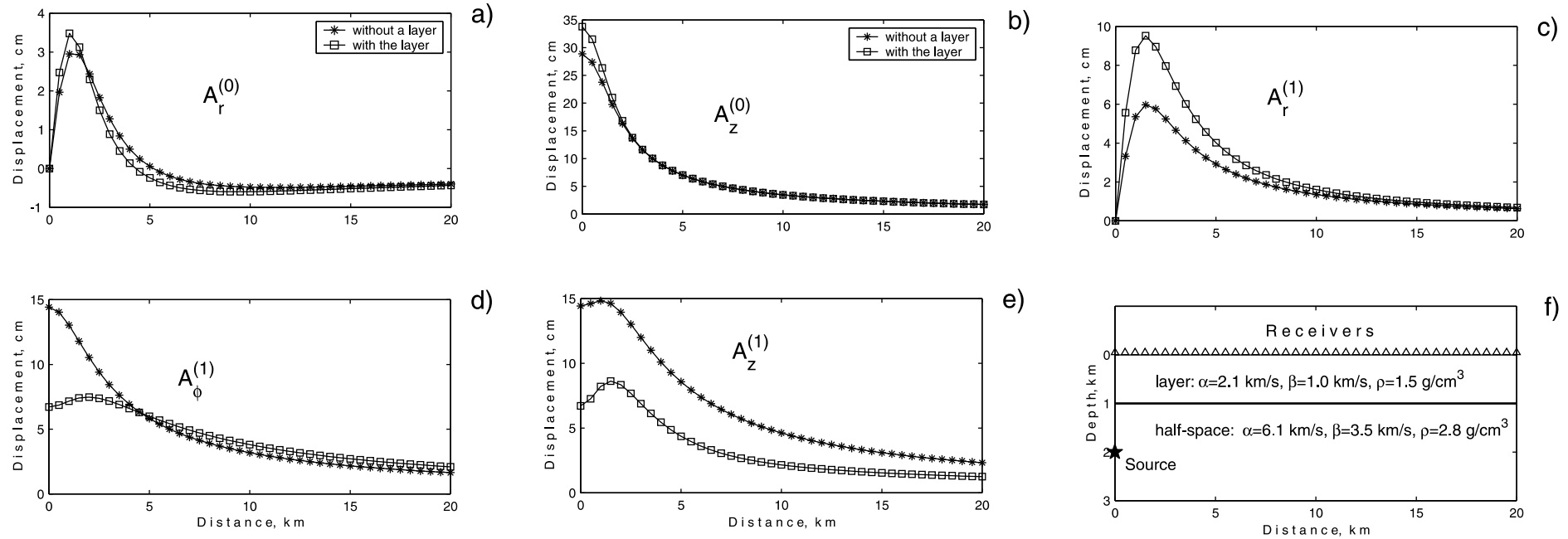
#### **Вывод формул для импедансов и формул пересчета векторов движения напряжения с одного уровня глубины на другой**

Полагаем, что сила приложена на внешней границе. Приведем выражения для импедансов в однородном полупространстве и формулы, которые позволяют последовательно рассчитать импедансы на внутренних границах слоев и, в конечном счете, на внешней границе. Это позволяет, в свою очередь, рассчитать вектора движения-напряжения в любой точке среды.

Случай P/SV-системы.

Матрица системы P/SV в статике, в отличие от динамики, является вырожденной – она имеет два корня кратности два, а не 4 различных, как в динамике. Для SH-системы при переходе от динамики к статике вырождения не возникает.

Полагаем  $z_2 > z_1$  две глубины в пределах однородного слоя (полупространства). Пусть  $\mathbf{f} = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$  – вектор движения-напряжения. Запишем систему дифференциальных уравнений (14) в виде



**Рис.1.** Значения базисных функций  $A_p^{(m)}(r, z_s)$ , ( $m = 0, 1; p = r, \varphi, z$ ) для расстояний  $r=0-20$  км и глубины  $z_s=2$  км, рассчитанных для полупространства без слоя (звездочки) и со слоем толщины 1 км (квадраты) (а-е). Значения параметров среды даны на графике f.

Базисным функциям можно придать следующий смысл. Поясним, что, если источник находится в точке  $(0, 0, z_s)$ , профиль приемников расположен на оси  $Ox$  ( $\varphi_s=0$ ), а  $u_x, u_y, u_z$  - компоненты смещения, то  $A_r^{(1)} = u_x$ ,  $A_r^{(0)} = -u_z$  при  $F_x = F_0$ ,  $F_y = F_z = 0$ ;  $A_\varphi^{(1)} = u_y$  при  $F_y = F_0$ ,  $F_x = F_z = 0$ ;  $A_z^{(0)} = u_z$ ,  $A_z^{(1)} = -u_x$  при  $F_z = F_0$ ,  $F_x = F_y = 0$ . Для  $F_0$  принято значение  $10^{14}$  Н.

**Fig.1.** Values of the basic functions  $A_p^{(m)}(r, z_s)$ , ( $m = 0, 1; p = r, \varphi, z$ ), for the range of distances  $r=0-20$  km and depth  $z_s=2$  km calculated for the pure half-space (asterisks) and for the half-space with the layer of thickness 1 km (squares) (a-e). f - values of the media parameters and source-receiver configuration.

The meaning of the basic functions is as follows. Let  $u_x, u_y, u_z$  be displacement components, the source be at the point  $(0, 0, z_s)$ , and the receivers are located on the  $Ox$  axis ( $\varphi_s=0$ ). Then  $A_r^{(1)} = u_x$ ,  $A_r^{(0)} = -u_z$  for ;  $F_x = F_0$ ,  $F_y = F_z = 0$ ;  $A_\varphi^{(1)} = u_y$  for ;  $F_y = F_0$ ,  $F_x = F_z = 0$ ;  $A_z^{(0)} = u_z$ ,  $A_z^{(1)} = -u_x$  for  $F_z = F_0$ ,  $F_x = F_y = 0$ . Calculations were carried out with  $F_0=10^{14}$  N.

$$\frac{d}{dz} \mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{f} \quad (\text{A.1})$$

где:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & k & 1/\mu & 0 \\ k(2\xi - 1) & 0 & 0 & \xi/\mu \\ k^2 4\mu(1 - \xi) & 0 & 0 & k(1 - 2\xi) \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \mu/(\lambda + 2\mu) \quad (\text{A.2})$$

Значения параметров среды относятся к рассматриваемому слою (полупространству). Представим матрицу  $\mathbf{A}$  в виде

$$\mathbf{A} = k \mathbf{L} \mathbf{J} \mathbf{L}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

где:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \text{жорданова форма матрицы } \mathbf{A}/k,$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} (1 - \xi)/2 & (1 + \xi)/2 & (\xi - 1)/2 & 1/2 \\ (\xi - 1)/2 & 0 & (\xi - 1)/2 & -\xi/2 \\ k\mu(1 - \xi) & k\mu & k\mu(1 - \xi) & k\mu(\xi - 1) \\ k\mu(\xi - 1) & -k\mu\xi & k\mu(1 - \xi) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \xi/(\xi - 1) & 1/(\xi - 1) & 0 & (1 + \xi)/(\xi - 1)/k/\mu/2 \\ 1 & 1 & 1/k/\mu/2 & k/\mu/2 \\ 0 & -1 & -\xi/(\xi - 1)/k/\mu/2 & -1/(\xi - 1)/k/\mu/2 \\ 1 & -1 & -1/k/\mu/2 & 1/k/\mu/2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Тогда решение системы (A.1) представляется в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{B}(z) \exp(kz) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(z) \exp(-kz) \end{pmatrix} \mathbf{w} \quad (\text{A.6})$$

где:

$$\mathbf{B}(z) = \begin{pmatrix} 1 & kz \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$  – постоянный вектор-столбец («T» - операция транспонирования)



Получим сначала выражение для P/SV импеданса в полупространстве  $z > z_n$ . Для вектора движения-напряжения имеем выражение

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{L}(z_n) \begin{pmatrix} \mathbf{B}(z - z_n) \exp(k(z - z_n)) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(z - z_n) \exp(-k(z - z_n)) \end{pmatrix} \mathbf{w} \quad (\text{A.7})$$

Поскольку при  $z \rightarrow \infty$  значения функций стремятся к нулю, полагаем что  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{w}(2) = 0$ . Тогда (A.7) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}(z) \\ \mathbf{H}_n^r(z) \mathbf{d}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{12}(z_n) \mathbf{B}(z - z_n) \mathbf{w}_1 \exp(-k(z - z_n)) \\ \mathbf{L}_{22}(z_n) \mathbf{B}(z - z_n) \mathbf{w}_1 \exp(-k(z - z_n)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

( $\mathbf{w}_1 = (w_3, w_4)^T$ ) отсюда получаем

$$\mathbf{H}_n^r(z) = \mathbf{L}_{22}(z_n) \mathbf{L}_{12}(z_n)^{-1}$$

причем в полупространстве импеданс не зависит от  $z$ . Подставляя выражения для матриц, окончательно получаем

$$\mathbf{H}_n^r = -\frac{2k\mu_n}{1 + \xi_n} \begin{pmatrix} 1 & \xi_n \\ \xi_n & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

где:

$$\xi_n = \mu_n / (\lambda_n + 2\mu_n).$$

Из формулы (A.6) имеем связь между значениями вектора движения-напряжения для двух глубин  $z_2 > z_1$  в пределах однородного слоя через пропагатор

$$\mathbf{f}(z_1) = \mathbf{P}(z_1, z_2) \mathbf{f}(z_2) \quad (\text{A.10})$$

Для статики имеем следующее выражение для пропагатора

$$\mathbf{P}(z_1, z_2) = \exp(kh) \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{B}(-h) \exp(-2kh) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}(-h) \end{pmatrix} \mathbf{L}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

где  $\mathbf{L}$  – матрица слоя (A.4),  $h = z_2 - z_1 > 0$ .

Представим  $4 \times 4$  матрицы в виде матриц из  $2 \times 2$  блоков

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Из (A.11), (A.12) имеем

$$\mathbf{P}(z_1, z_2) = \mathbf{R} \exp(kh) \quad (\text{A.13})$$

где:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{11} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{12}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{21} & \mathbf{L}_{11}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{12} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{12}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{L}_{21}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{11} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{22}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{21} & \mathbf{L}_{21}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{12} \exp(-2kh) + \mathbf{L}_{22}\mathbf{B}(-h)\mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$$

Запишем формулу (A.10), используя определение импеданса

$$\mathbf{d}(z_1) = (\mathbf{P}_{11}(z_1, z_2) + \mathbf{P}_{12}(z_1, z_2)\mathbf{H}^r(z_2))\mathbf{d}(z_2) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{H}^r(z_1)\mathbf{d}(z_1) = (\mathbf{P}_{21}(z_1, z_2) + \mathbf{P}_{22}(z_1, z_2)\mathbf{H}^r(z_2))\mathbf{d}(z_2)$$

Отсюда получаем искомое выражение  $\mathbf{H}^r(z_1)$  через  $\mathbf{H}^r(z_2)$

$$\mathbf{H}^r(z_1) = (\mathbf{R}_{21} + \mathbf{R}_{22}\mathbf{H}^r(z_2))(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12}\mathbf{H}^r(z_2))^{-1} \quad (\text{A.15})$$

А из (A.14) – выражение для вектора смещения  $\mathbf{d}(z_2)$  через  $\mathbf{d}(z_1)$

$$\mathbf{d}(z_2) = \exp(-kh)(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12}\mathbf{H}^r(z_2))^{-1}\mathbf{d}(z_1) \quad (\text{A.16})$$

Приведем формулы для случая SH-системы.

Выражение для SH импеданса в полупространстве  $z > z_n$

$$H^l(z) = H_n^l = -k\mu_n \quad (\text{A.17})$$

Выражение для импеданса на глубине  $z_1$  через импеданс на глубине  $z_2$  ( $z_2 > z_1$ )

$$H^l(z_1) = k\mu \frac{-k\mu + H^l(z_2) + (k\mu + H^l(z_2))\exp(-2kh)}{k\mu - H^l(z_2) + (k\mu + H^l(z_2))\exp(-2kh)} \quad (\text{A.18})$$

где  $h = z_2 - z_1 > 0$ .

Выражение для смещения  $l_1(z_2)$  через  $l_1(z_1)$  таково

$$l_1(z_2) = \frac{2k\mu}{k\mu - H^l(z_2) + (k\mu + H^l(z_2))\exp(-2kh)} l_1(z_1) \quad (\text{A.19})$$

#### Список литературы

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1, 2. М.: Наука, 1983. 880 с.
2. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. Решение задачи Лэмба для вертикально неоднородного упругого полупространства // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 12. с. 11-25.

3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 304 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Honda, R. and K. Yomogida. Static and dynamic displacement near a fault with the discrete wavenumber method // *Phys. Earth Planet. Inter.* 2003, 137, 107-127.
6. Honda, R. and K. Yomogida. Effects of a soft surface layer on near-fault static and dynamic displacements // *Geophys. J. Int.* 2003, 154, 441-462.
7. Janovich, D.B., M.I.Husseini, and M.A. Chinnary. Elastic dislocations in a layered half-space – I. Basic theory and numerical methods // *Geophys. J.R.Soc.* 1974, 39, 205-217.
8. Okada, Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1985, 75, 1135-1154.
9. Okada, Y. Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1992, 82, 1018-1040.
10. Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in a layered half-space // *Proceedings of the 4th International Conference “Problems of geocosmos”, St. Petersburg, Russia, 2002, pp. 320-323.*
11. Singh, S.J. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources // *J. Geophys. Res.* 1970, 75, 3257-3263.
12. Wang R. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green’s functions // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1999, 89, 3, 733-741.
13. Zhu L. and L.A. Rivera. A note on the dynamic and static displacements from a point source in multilayered media // *Geophys. J. Int.* 2002, 148, 619-627.