УДК 550.34

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ РАССЕЯННЫХ ВОЛН МЕТОДОМ МОМЕНТОВ: ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК В ТРЕХМЕРНОЙ СРЕДЕ С ИЗОТРОПНЫМ РАССЕЯНИЕМ

Абубакиров И.Р.

Камчатский филиал Геофизической службы РАН, г. Петропавловск-Камчатский, air@emsd.ru

Введение

В последние десятилетия для теоретического анализа процесса рассеяния и разработки корректных методов интерпретации рассеянных сейсмических волн стала широко использоваться теория переноса излучения в случайно-неоднородной среде.

К настоящему времени получено аналитическое решение уравнения переноса для базового, хотя и не вполне реалистического случая многократного изотропного рассеяния волн от мгновенного изотропного точечного источника в статистически-однородной рассеивающей среде. Это решение широко используется в сейсмологии для разделения эффектов рассеяния и поглощения при анализе короткопериодных записей слабых близких землетрясений.

Практическое использование реалистической модели *анизотропного* рассеяния затруднено из-за отсутствия удобных в вычислительном отношении решений уравнения переноса. Попытки получить такие решения аналитическими методами оказались нерезультативными. В этой ситуации представляется перспективным применение метода моментов, позволяющего реконструировать решение уравнения переноса по конечному числу пространственных моментов, расчет которых серьезных затруднений не вызывает. Однако прежде следует убедиться в работоспособности метода моментов на примере простейшей модели *изотропного* рассеяния.

Цель работы – продемонстрировать, что метод моментов позволяет получить аккуратное решение уравнения переноса для случая изотропного точечного источника в случайно-неоднородной изотропно рассеивающей среде.

В настоящей работе метод моментов используется для реконструкции пространственно-временного распределения плотности энергии рассеянных волн с кратностью рассеяния второго и более высоких порядков (для однократно-рассеянного излучения используется известное аналитическое решение). Сначала реконструируется решение для плоского источника. Затем, с использованием известного преобразования между случаями сферического и плоского источников, строится искомое решение для точечного источника. Расчет пространственного распределения плотности энергии многократно рассеянных волн производится с использованием полиномов Гегенбауэра. Коэффициенты полиномиального разложения вычисляются по известным пространственным моментам многократно рассеянного излучения.

Проведенное сопоставление с точным решением уравнения переноса показало, что относительная погрешность решения, реконструированного методом моментов, для расстояний до семи длин свободного пробега и времен запаздывания до 20 единиц времени свободного пробега, не превышает 0.5% как вблизи волнового фронта, так и вдали от него.

Плоский бесконечный изотропный источник

Интегральное уравнение переноса для плотности энергии $E^{pl}(x,t)$ от плоского бесконечного изотропного источника, расположенного в плоскости $x = 0$, имеет вид [4]:

$$E^{pl}(x,t) = \frac{W}{2ct} e^{-\frac{ct}{l}} H\left(t - \frac{|x|}{c}\right) + \frac{1}{l}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{c(t-t')}{l}}}{2(t-t')} H\left(t - t' - \frac{|x-x'|}{c}\right) E^{pl}(x',t') dx' dt', \qquad (1)$$

где W – полная энергия, мгновенно излученная источником в момент времени $t = 0$, c – скорость распространения излучения, l – средняя длина свободного пробега, $H(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \ge 0 \end{cases}$.

Вводя безразмерные величины $\chi = x/l, \tau = ct/l$, перепишем уравнение (1) для нормированной плотности энергии $\varepsilon^{pl}(\chi,\tau) = lE^{pl}(x,t)/W$ в виде:

$$\varepsilon^{pl}(\chi,\tau)=\frac{1}{2c\tau}e^{-\tau}H(\tau-|\chi|)+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(\tau-\tau')}}{2(\tau-\tau')}H(\tau-\tau'-|\chi-\chi'|)\varepsilon^{pl}(\chi',\tau')d\chi'd\tau'. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) можно представить в виде:

$$\varepsilon^{pl}(\chi,\tau)=\varepsilon_0^{pl}(\chi,\tau)+\varepsilon_1^{pl}(\chi,\tau)+\varepsilon_d^{pl}(\chi,\tau), \qquad (3)$$

где $\varepsilon_0^{pl}(\chi,\tau)$, $\varepsilon_1^{pl}(\chi,\tau)$ – нормированные плотности энергии нерассеянного и однократно рассеянного излучения, соответственно:

$$\varepsilon_0^{pl}(\chi,\tau)=\frac{1}{2\tau}e^{-\tau}H(\tau-|\chi|), \qquad (4)$$

$$\varepsilon_1^{pl}(\chi,\tau)=-e^{-\tau}\left\{\left(\frac{1+\chi/\tau}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\chi/\tau}{2}\right)+\left(\frac{1-\chi/\tau}{2}\right)\ln\left(\frac{1-\chi/\tau}{2}\right)\right\}H(\tau-|\chi|), \qquad (5)$$

$\varepsilon_d^{pl}(\chi,\tau)$ - нормированная плотность энергии многократно рассеянного излучения, для реконструкции которой в данной работе используется метод моментов.

Поскольку функция $\varepsilon_d^{pl}(\chi,\tau)$ ограничена волновыми фронтами при $|\chi|=\tau$, удобно ввести переменную $\xi=\chi/\tau$, $-1\le\xi\le1$, и плотности:

$$\varphi^{pl}(\xi,\tau)=\tau\varepsilon^{pl}(\xi\tau,\tau),\quad \varphi_0^{pl}(\xi,\tau)=\tau\varepsilon_0^{pl}(\xi\tau,\tau)=\frac{1}{2}e^{-\tau}H(1-|\xi|),$$

$$\varphi_1^{pl}(\xi,\tau)=\tau\varepsilon_1^{pl}(\xi\tau,\tau)=-\tau e^{-\tau}\left\{\left(\frac{1+\xi}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\xi}{2}\right)+\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\ln\left(\frac{1-\xi}{2}\right)\right\}H(1-|\xi|),$$

$$\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)=\tau\varepsilon_d^{pl}(\xi\tau,\tau)$$

с пространственными моментами $\mu_{2k}^{pl}(\tau)$, порядка $2k, k=0,1,2,\ldots$ (моменты нечетного порядка равны нулю) [2]:

$$\mu_{2k}^{pl}(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\xi^{2k}\varphi^{pl}(\xi,\tau)d\xi=\begin{cases}1, k=0\\ 2k(2k-1)\sum\limits_{m=0}^{k-1}\alpha_m^k\tau^{m+1-2k}\sum\limits_{l=0}^{m+1}(-1)^l\dfrac{\gamma(2k+l-1,\tau)}{l!(m-l+1)!\,\tau^l},\ k\ge1\end{cases}$$

где

$$\alpha_0^k=\frac{1}{2k+1},\ \alpha_m^k=\sum_{j=m}^{k-1}\frac{\alpha_{m-1}^j}{2(k-j)+1},\ 1\le m\le k-1;\ \gamma(2k+l-1,\tau)=\int\limits_0^{\tau}\tau_1^{2k+l-2}e^{-\tau_1}d\tau_1,$$

$$\mu_{0,2k}^{pl}(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\xi^{2k}\varphi_0^{pl}(\xi,\tau)d\xi=\frac{1}{(2k+1)}e^{-\tau},\ \mu_{1,2k}^{pl}(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}\xi^{2k}\varphi_1^{pl}(\xi,\tau)d\xi=\frac{\tau}{(k+1)(2k+1)}e^{-\tau}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(2j+1)},$$

$$\mu_{d,2k}^{pl}(\tau)=\mu_{2k}^{pl}(\tau)-\mu_{0,2k}^{pl}(\tau)-\mu_{1,2k}^{pl}(\tau).$$

Моменты $\mu_{d,2k}^{pl}(\tau)$ применяются для реконструкции $\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)$ с использованием системы ортогональных на [-1,1] полиномов $f_n(\xi), n=0,1,2,\ldots,N$:

$$\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)\approx\varphi_d^{pl(N)}(\xi,\tau)=w(\xi,\tau)\sum_{n=0}^{N}C_n(\tau)f_n(\xi)H(1-|\xi|),$$

где $w(\xi,\tau)$ - весовая функция, а коэффициенты $C_n(\tau)$ определяются интегралом:

$$C_n(\tau)=\int\limits_{-1}^{1}f_n(\xi)\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)d\xi,$$

позволяющим выразить $C_n(\tau)$ через $\mu_{d,2k}^{pl}(\tau)$ исходя из условия ортогональности $f_n(\xi)$:

$$\int\limits_{-1}^{1}w(\xi,\tau)f_n(\xi)f_m(\xi)d\xi=\delta_{nm}.$$

Известно, что эффективность метода моментов зависит от того, насколько близка весовая функция к искомой функции, поэтому систему полиномов выбирали исходя из свойств $\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)$.

При малых значениях τ доминирует двукратно рассеянное излучение, плотность которого можно приближенно аппроксимировать функцией, пропорциональной $\left(1-\xi^2\right)^{3/2}$. Поэтому для реконструкции $\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)$ целесообразно выбрать систему полиномов Гегенбауэра

$G_n^{(2)}(\xi)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{[\mathrm{n}/2]}(-1)^k\frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k)!}(2\xi)^{n-2k}$ с весовой функцией $w(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{3/2}$.

В этом случае формула для реконструкции $\varepsilon_d^{pl}(\chi,\tau)=\frac{1}{\tau}\varphi_d^{pl}(\xi,\tau)$ имеет вид:

$$\varepsilon_d^{pl}(\chi,\tau)\approx\varepsilon_d^{pl(N)}(\chi,\tau)=\frac{\left(1-(\chi/\tau)^2\right)^{3/2}}{\tau}\sum_{n=0}^{N}C_n(\tau)G_n^{(2)}(\chi/\tau)H(\tau-|\chi|), \tag{6}$$

где

$$C_n(\tau)=\frac{8}{\pi(n+1)(n+3)}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 2^{n-2k}\frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k)!}\mu_{d,n-2k}^{pl}(\tau). \tag{7}$$

Подставляя выражения (4), (5), (6) в формулу(3), получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{pl(N)}(\chi,\tau)=&\frac{1}{2\tau}e^{-\tau}H(\tau-|\chi|)+\frac{\left(1-(\chi/\tau)^2\right)^{3/2}}{\tau}\sum_{n=0}^{N}C_n(\tau)G_n^{(2)}(\chi/\tau)H(\tau-|\chi|)\\&-e^{-\tau}\left\{\left(\frac{1+\chi/\tau}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\chi/\tau}{2}\right)+\left(\frac{1-\chi/\tau}{2}\right)\ln\left(\frac{1-\chi/\tau}{2}\right)\right\}H(\tau-|\chi|).\end{aligned} \tag{8}$$

Точечный изотропный источник

Интегральное уравнение переноса для плотности энергии $E^{sp}(r,t)$ от точечного изотропного источника, расположенного в точке $r=0$, имеет вид [4]:

$$\begin{aligned}E^{sp}(r,t)=&\frac{W}{4\pi cr^2}e^{-\frac{ct}{l}}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\\&+\frac{1}{l}\int_0^t\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{c(t-t')}{l}}}{2(t-t')}\left(\frac{r'}{r}\right)\left[H\left(t-t'-\frac{|r-r'|}{c}\right)-H\left(t-t'-\frac{|r+r'|}{c}\right)\right]E^{sp}(r',t')dr'\,dt'.\end{aligned} \tag{9}$$

Вводя безразмерные величины $\rho=r/l,\tau=ct/l$, можно переписать уравнение (9) для нормированной плотности энергии $\varepsilon^{sp}(\rho,\tau)=l^3E^{sp}(r,t)/W$ в виде:

$$\varepsilon^{sp}(\rho,\tau)=\frac{e^{-\tau}\delta(\tau-\rho)}{4\pi\rho^2}+\int_0^\tau\int_0^\infty\frac{e^{-(\tau-\tau')}}{2(\tau-\tau')}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left[H(\tau-\tau'-|\rho-\rho'|)-H(\tau-\tau'-|\rho+\rho'|)\right]\varepsilon^{sp}(\rho',\tau')d\rho'\,d\tau'. \tag{10}$$

Известно, что плотности энергии от точечного и плоского изотропных источников связаны соотношением [1]:

$$\varepsilon^{sp}(\rho,\tau)=-\frac{1}{2\pi\chi}\left.\frac{\partial\varepsilon^{pl}(\chi,\tau)}{\partial\chi}\right|_{\chi=\rho}. \tag{11}$$

Подстановка уравнения (8) в формулу (11) дает окончательный результат:

$$\varepsilon^{sp(N)}(\rho,\tau)=\frac{e^{-\tau}\delta(\tau-\rho)}{4\pi\rho^2}+\frac{e^{-\tau}}{4\pi\rho\tau}\ln\left(\frac{\tau+\rho}{\tau+\rho}\right)H(\tau-\rho)+\frac{\left(1-\eta^2\right)^{1/2}}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}C_n(\tau)F_n(\eta), \tag{12}$$

где $\eta=\rho/\tau$, $C_n(\tau)$ определяется формулой (7),

$$F_n(\eta)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{[\mathrm{n}/2]}(-1)^k\frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k)!}(2\eta)^{n-2k}\left[3-(n-2k)\frac{\left(1-\eta^2\right)}{\eta^2}\right]H(1-\eta).$$

Проверку точности предложенного разложения (12), проводили сравнением с известным аналитическим решением для $\varepsilon(\rho,\tau)$ [3], рассчитывая относительную погрешность

$$\delta(\rho,\tau)=\frac{\left|\varepsilon^{sp(N)}(\rho,\tau)-\varepsilon^{sp}(\rho,\tau)\right|}{\varepsilon^{sp}(\rho,\tau)}100\%$$

для набора значений пар $(\rho = 0.05, 0.1, 0.15, \ldots, 7, \tau = 0.05, 0.1, 0.0.15, \ldots, 20)$ при $N = 26$ (при $N > 26$ возникает численная неустойчивость). Результаты сравнения, приведенные на рисунке 1, показывают, что относительная погрешность предложенного разложения не превышает 0.5%, как вблизи волнового фронта, так и вдали от него.

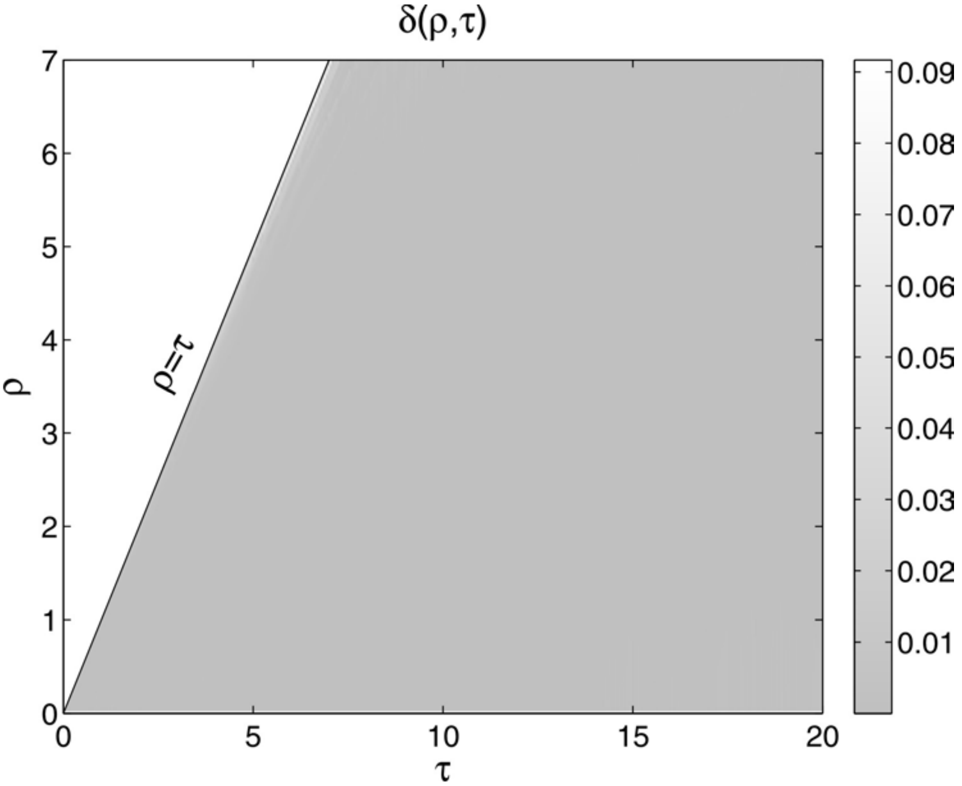

Рис. 1 – Пространственно-временное распределение относительной ошибки $\delta(\rho,\tau)$ реконструкции решения уравнения переноса методом моментов для случая изотропного точечного источника в трехмерной случайно-неоднородной изотропно рассеивающей среде.

Выводы

Предложено новое полиномиальное разложение для решения уравнения переноса энергии от точечного импульсного изотропного источника в трехмерной среде с изотропным рассеянием.

Предложенное разложение позволяет реконструировать решение уравнения переноса в важном для практических приложений диапазоне расстояний до семи длин свободного пробега и времен запаздывания до 20 единиц времени свободного пробега с относительной погрешностью, не превышающей 0.5%.

Список литературы

1. Холин С.А. Несколько точных решений нестационарного кинетического уравнения без учета замедления // Вычислительная математика и математическая физика. 1964. Т. 4. № 6. С. 1126-1131.
2. Ganapol B.D. Exact time-dependent moments for the monoenergetic neutron transport equation with isotropic scattering // Nuclear science and engineering. 1985. V. 89. № 3. P. 256-260.
3. Ganapol B.D. Progress report on the development of time dependent neutral particle transport benchmarks in two and three dimensions // Transactions of the American Nuclear Society. 2005. V. 93. P.458-460.
4. Henderson D.L., Maynard C.W. Time-dependent single-collision kernels for integral transport-theory // Nuclear Science and Engineering. 1989. V. 102. № 2. P. 172-182.