

## ФУНКЦИЯ ПОВТОРЯЕМОСТИ ЦУНАМИ: СТРУКТУРА, ПАРАМЕТРЫ, КАРТЫ ЦУНАМИОПАСНОСТИ

*В. М. Кайстренко*

*Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН,  
Южно-Сахалинск, victor@imgg.ru*

### Введение. Основные свойства функция повторяемости цунами

Функция повторяемости цунами (ФПЦ) – важнейшая характеристика цунамиактивности, и знание ФПЦ позволяет количественно оценивать цунамиопасность. В соответствии с определением, ФПЦ – это средняя частота событий в заданном месте  $x$  с высотой равной или превышающей  $h$

$$\varphi(x; h) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{N(\geq h)}{T} \right\rangle, \quad (1)$$

где  $N(\geq h)$  есть число таких событий, произошедших за период времени  $T$ . Эта функция положительная и убывающая. Аналитическая форма ФПЦ неизвестна и серьезной проблемой является построение адекватной аналитической аппроксимации. Аналогичная проблема имеет место в сейсмологии. Сама ФПЦ и ее основной аргумент  $h$  – физические величины, поэтому по теореме Бэкингема соотношение (1) должно иметь безразмерную форму [2]. В общем случае для этого необходимы два масштабных параметра  $f$  и  $H^*$  частоты и высоты, соответственно. Тогда:

$$\varphi(x; h) = f(x) \cdot \Phi\left(\frac{h}{H^*(x)}\right) \quad (2)$$

Возможное наличие меньшего или большего количества параметров цунамиактивности рассмотрены ниже. Переменная  $x$  здесь рассматривается как индикатор места.

Физический смысл введенных параметров выясняется при рассмотрении распространения цунами из открытого океана к берегу (рис.1).



Рис. 1. Схема распространения цунами в регионе размером несколько десятков километров.

Характерная длина волны цунами в открытом океане составляет десятки – первые сотни километров, поэтому волновое поле в океане гладкое и существенно не изменяется на расстояниях порядка первых десятков километров, и высоты цунами в таких точках  $x'$  и  $x'_0$  практически одни и те же, то есть  $x'$  – медленная переменная. Зато высоты цунами в соответствующих близбереговых точках  $x$  и  $x_0$  могут различаться существенно.

Каждое цунами, зарегистрированное в близбереговой точке  $x$  с максимальным заплеском  $h$ , имело в открытом океане высоту  $h'$  в точке  $x'$ . Введение среднего коэффициента трансформации (увеличения) высоты цунами  $K(x', x) = k(x', x)$  при его распространении от глубокой воды к берегу позволяет записать  $h = K(x', x) \cdot h'$  и построить цепочку равенств:

$$\varphi(x, h) = \varphi(x', h') = \left| \text{подстановка : } h = K(x', x) \cdot h' \right| = \varphi\left(x', \frac{h}{K(x', x)}\right) = \left| \text{подстановка : } x' = x'(x) \right| = F\left(x, \frac{h}{K(x)}\right). \quad (3)$$

Принимая во внимание, что максимальные высоты волн на урезе, даваемые линейной и нелинейной одномерной моделью волнового наката на плоский берег без разрушения волны, в точности совпадают [6], мы используем линейную модель трансформации с коэффициентом  $K$  в двумерной модели.

Первая переменная  $x$  в (3) соответствует медленной переменной  $x'$  и, соответственно, также является медленным параметром, поэтому зависимостью от нее можно пренебречь для районов размером в первые десятки километров и записать:

$$\varphi(x, h) = F\left(\frac{h}{K(x)}\right). \quad (4)$$

Сравнение (2) и (4) дает окончательную структуру региональной ФПЦ

$$\varphi(x; h) = f \cdot \Phi\left(\frac{h}{H^*(x)}\right) \quad (5)$$

Физический смысл параметра  $f$  – асимптотическая частота сильных цунами в регионе, которая медленно изменяется вдоль берега и может считаться региональной постоянной, поскольку масштаб проявлений сильных цунами – сотни километров. Параметр  $H^*$  – характеристическая высота цунами, пропорциональная среднему коэффициенту трансформации высоты цунами при ее распространении из океана к берегу. Этот параметр существенно изменяется вдоль берега.

### Построение функция повторяемости цунами

В каталогах для многих пунктов Тихоокеанского побережья собраны данные о высотах цунами, которые можно рассматривать как случайный ряд и ранжировать в соответствии с величиной  $h_1 > h_2 > h_3 > \dots$ . Поток цунами можно рассматривать как приближенно Пуассоновский (заметные отклонения связаны с частыми и слабыми событиями [3]), поэтому вероятность того, что за период  $T$  произойдет  $n$  цунами с максимальной высотой, превосходящей пороговую высоту  $h$  дается формулой:

$$P_n(\geq h) = e^{-\varphi(h) \cdot T} \cdot \frac{[\varphi(h) \cdot T]^n}{n!} \quad (6)$$

Для построения линейной регрессионной модели в полулогарифмическом масштабе требуется найти средние логарифмы частот  $\overline{\ln \varphi_k}$ , соответствующие ранжированным высотам цунами. Использование обычного метода наименьших квадратов некорректно, поскольку дисперсии частот  $\ln \varphi_k$  не равны друг другу,  $D(\ln \varphi_k) \neq D(\ln \varphi_i)$  для  $k \neq i$  и они коррелированы. Модель линейной регрессии имеет вид:

$$\overline{\ln \varphi_k} = a + b \cdot h_k + e_k, \quad (7)$$

где  $e_k$  – центрированные случайные отклонения. Очевидно,  $a = \ln f$  (точка пересечения ординаты) и  $b = -1/H^*$  (наклон линии регрессии).

Очевидно, что распределение каждой ранжированной высоты  $h_k$  зависит от неизвестной ФПЦ  $\varphi(h)$ , однако плотность распределения соответствующей частоты  $\rho_k(h_k)$  универсальна для любого потока событий, с вероятностями, произвольно зависящими от функции  $\varphi(h)$  параметра  $h$ , но не от параметра  $h$  непосредственно, подобно (6). При этом [5]

$$\overline{\ln \varphi_k} = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{s} - 0.577\dots - \ln T, \quad \left\{ \rightarrow \ln(k/T) \right\}_{k \rightarrow \infty} \quad (8)$$

$$D_k = D(\ln \varphi(h_k)) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{s^2}, \quad \left\{ \rightarrow 0 \right\}_{k \rightarrow \infty} \quad (9)$$

Соответствующие стандартные отклонения  $\sigma(\ln \varphi_k)$  можно использовать в качестве априорных оценок относительных частот. Эти величины для частот с первыми порядковыми номерами велики, так  $\sigma_1 = \sigma(\ln \varphi_1) = 1.28$  для частоты наибольшего события.

Анализ данных показывает, что ФПЦ для больших высот цунами можно аппроксимировать экспонентой

$$\varphi(h) = f \cdot e^{-\frac{h}{H^*(x)}}, \quad (10)$$

соответствующей распределению вероятности максимального события  $P_0$  [1]

$$P_0(>h) = e^{-f \cdot T \cdot e^{-\frac{h}{H^*(x)}}} \quad (11)$$

Пример ФПЦ для Южно-Курильска приведен на рисунке 3.

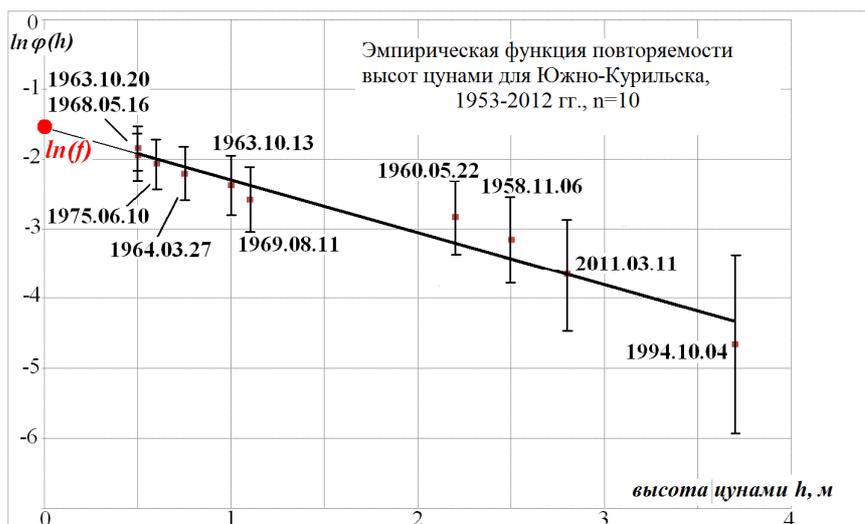


Рис.2. Эмпирическая функция повторяемости для Южно-Курильска, построенная по высотам исторических цунами с  $h \geq 0.5$  м за период времени 1953-2012 гг. Все величины  $\ln \varphi(h_k)$  снабжены соответствующими стандартными отклонениями. Асимптотическая частота больших цунами для Южно-Курильска  $f = 0.16 \pm 0.24$  1/год отмечена кружком на оси ординат. Характеристическая высота цунами в Южно-Курильске равна  $H^* = 1.5$  м и  $1/H^* = 0.7 \pm 0.2$  1/м.

Реальный размер региона, в котором можно считать постоянной асимптотическую частоту больших цунами, значительно больше теоретически ожидаемого. В таблице 1 приведены параметры цунамиактивности для четырех пунктов в регионе Южных Курильских островов.

Таблица 1.

Параметры цунамиактивности  $f$  и  $H^*$  и их стандартные отклонения для четырех пунктов в регионе Южных Курильских островов

Место	$\ln f$	$f, 1/\text{year}$	$\sigma(\ln(f))$	$1/H^*, \text{m}^{-1}$	$\sigma(1/H^*)$	$H^*, \text{m}$	$\delta H^*/H^*$
Буревестник	-1.7	0.14	0.3	0.6	0.19	1.6	0.3
Курильск	-1.4	0.24	1.4	3.3	2	0.3	0.6
Малокурильское	-1.6	0.15	0.2	0.5	0.15	2.0	0.3
Южно-Курильск	-1.6	0.16	0.2	0.7	0.2	1.5	0.3

Видно, что частоты сильных цунами, с учетом погрешности, одни и те же при размере региона около 250 км. Произведение  $\sigma(1/H^*) \cdot H^*$  может быть использовано в качестве оценки относительной погрешности  $\delta H^*/H^*$  характеристической высоты цунами  $H^*$ .

### Общая проблема параметризации функция повторяемости цунами

В общем случае ФПЦ  $\varphi$  может также зависеть от целого ряда параметров  $c_1, \dots, c_n$ ,

$$\varphi = \varphi(h; c_1, \dots, c_n). \quad (12)$$

Мы можем предположить, что все физические процессы в очагах цунами подобны, и повторяемость цунами в заданной точке описывается одной и той же универсальной функцией с различными наборами параметров для разных очаговых зон. Подобного типа универсальность в сейсмологии подробно рассматривалась Я.Каганом [4] и ранее высказывалась Л.Эстевой.

Пусть цунамигенная зона  $C$  разбита на сумму двух зон  $A$  и  $B$ , тогда частные функции повторяемости будут функциями общего вида, зависящими от соответствующих наборов параметров  $(a_1, \dots, a_n)$  и  $(b_1, \dots, b_n)$ , относящихся к зонам  $A$  и  $B$ . В то же время полная функция повторяемости есть сумма двух функций повторяемости

$$\varphi(h; c_1, \dots, c_n) = \varphi(h; a_1, \dots, a_n) + \varphi(h; b_1, \dots, b_n). \quad (13)$$

Это значит, что все параметры  $c_k$  являются функциями параметров  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

$$c_k = c_k(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n). \quad (14)$$

Математически последнее соотношение задает коммутативную полугруппу:

$$c = a \circ b, \quad (15)$$

единичный элемент  $i = (i_1, \dots, i_n)$  (или элементы) которой соответствует нецунамигенной зоне, так что  $\varphi(h, i) = 0$  и  $c(a; i) = a$ . Мы можем предположить, что функция  $c(a; b)$  гладкая, тогда ее производная по  $a$  (матрица Якоби) будет единичной  $c'_a(a; i) = I$ .

Дифференцирование (13) по  $a$  и  $b$  дает

$$\varphi_c(h; c) \cdot c'_a(a; b) = \overset{def}{\varphi_a(h; a)} = z(h; a), \quad (16)$$

$$\varphi_c(h; c) \cdot c'_b(a; b) = \overset{def}{\varphi_b(h; b)} = z(h; b).$$

Матрица Якоби  $c'_a(a; b)$  имеет обратную в некоторой окрестности  $b=i$ , что позволяет получить

$$z(h; b) = z(h; a) \cdot \{c'_a(a; b)\}^{-1} \cdot c'_b(a; b). \quad (17)$$

Зафиксируем параметр  $a$ , тогда видно, что  $z(h; b)$  есть линейная комбинация функций, зависящих только от  $h$  с коэффициентами, зависящими только от  $b$ . Такова же будет структура ФПЦ

$$\varphi(h; c) = \sum_{k=1}^m f_k(c) \varphi_k(h). \quad (18)$$

В последней формуле все коэффициенты  $f_k$  ( $m \leq n$ ) – частоты, и это наиболее адекватный набор параметров вместо параметров  $(c_1, \dots, c_n)$ . Безразмерная форма ФПЦ имеет вид:

$$\varphi(h) = \sum_{k=1}^m f_k \Phi_k \left( \frac{h}{H_k^*} \right). \quad (19)$$

Последнее соотношение можно интерпретировать как суму вкладов разных частей цунамигенной зоны. Кроме того, все  $\Phi_k$  должны быть одной и той же универсальной функцией  $\Phi$ , так что итоговая форма ФПЦ будет

$$f \Phi \left( \frac{h}{H^*} \right) = \sum_{k=1}^m f_k \Phi \left( \frac{h}{H_k^*} \right). \quad (20)$$

Единственный тип гладких функций, удовлетворяющий (20) при любых значениях  $f, H^*, f_k, H_k^*$ ,  $k=1, \dots, m$ , это – степенная функция  $\Phi(x) = Cx^\alpha$ , имеющая один размерный параметр  $C$ . Поскольку реальным данным соответствует  $\alpha = -1$ , то параметр  $C$  имеет размерность скорости, и значения в диапазоне порядка нескольких см в год, что совпадает, и видимо не случайно, с масштабом скоростей деформации земной коры в цунамигенных зонах [5]. Кроме того для степенных ФПЦ относительный вклад разных частей цунамигенной зоны не зависит от пороговой высоты волны  $h$ :

$$\frac{f_k \Phi \left( \frac{h}{H_k^*} \right)}{f \Phi \left( \frac{h}{H^*} \right)} = \frac{f_k H_k^{*\alpha}}{f H^{\alpha}} = const. \quad (21)$$

Если соотношение (24) рассматривать с «геофизической» точностью, тогда оно «точное» только для частых и, соответственно, слабых и умеренных цунами.

Вследствие энергетических ограничений форма ФПЦ для больших значений высот цунами должна быть другой. Рассмотрим отношение частичных ФПЦ для двух зон  $\psi(h) = f_1 \Phi(h/H_1^*) / f_2 \Phi(h/H_2^*)$  как функцию высоты цунами  $h$ . Отличие  $\psi(h)$  от постоянной будет тем отчетливее, чем больше разнятся значения характеристических высот, для определенности  $H_1^* < H_2^*$ . Поведение такой функции зависит от отношения  $\lambda = H_2^*/H_1^*$ , и изучено на японском материале исторических цунами на побережье Санрику, С-В Хонсю, включающем катастрофические события 1896, 1933 и 2011 годов. Для каждого пункта вся цунамигенная зона делится на две части – ближнюю с большим значением  $H^*$  и удаленную с меньшим значением  $H^*$ . В качестве приближенного значения параметра  $\lambda$  взято отношение максимальных наблюдавшихся высот цунами с очагами в этих подзонах (рис.3).

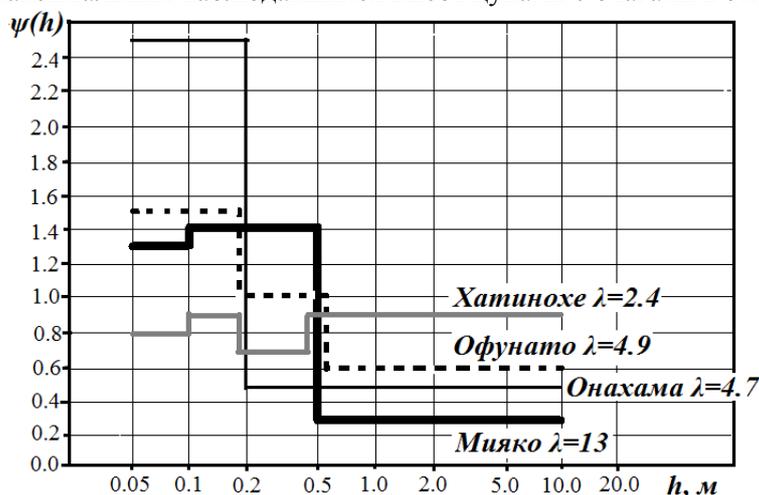


Рис. 3. Функции  $\psi(h)$ , построенные для нескольких пунктов побережья Санрику, С-В Хонсю.

Очевидно убывание таких функций при  $\lambda > 4$ . В длительном историческом опыте Японии все катастрофические цунами были связаны только с «близкими» очагами, поэтому можно считать, что  $\psi(h) \rightarrow 0$  при увеличении  $h$ , но тогда  $\psi(h) \rightarrow 0$  и для функций типа  $\Phi(x) \cdot x^\beta$  с произвольной  $\beta$ . Поэтому ФПЦ для больших высот цунами убывает быстрее любой степени, что делает приемлемой экспоненциальную аппроксимацию ФПЦ.

### Заключение

Теоретически рассмотрена структура функции повторяемости цунами общего вида. Выявлены параметры цунамиактивности: асимптотическая частота сильных цунами  $f$ , которая медленно изменяется вдоль берега и может считаться региональной постоянной, и локальный параметр - характеристическая высота цунами  $H^*$ , пропорциональная среднему коэффициенту трансформации высоты цунами при ее распространении из океана к берегу.

Показано, что ФПЦ для больших высот цунами убывает быстрее любой степени.

Исходя из оценок параметров цунамиактивности  $H^*$  и  $f$  построен ряд карт для вероятной высоты цунами в периодом повторяемости  $T$  лет

$$h_T = H^* \cdot \ln(T \cdot f). \quad (22)$$

Работа поддержана РФФИ, проект № 11-05-01054-а.

### Список литературы

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 452 с.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
3. Geist E.L., Parsons T. Distribution of tsunami interevent times // Geophys. Res. Lett. 2008. 35. L02612
4. Kagan Y.Y. Universality of the seismic-moment-frequency relation // Pure Appl. Geophys. 1999. 155. PP. 537-573.
5. Kaistrenko V. Tsunami Recurrence versus Tsunami Height Distribution along the Coast // Pure Appl. Geophys. 2011. 168. PP. 2065–2069
6. Pelinovsky E., Mazova R. Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards. 1992. 6. PP. 227-249