

А. А. ГУСЕВ

НОМОГРАММА ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ГРУПП ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Одним из подходов к прогнозу землетрясений является изучение статистических закономерностей их возникновения в пространстве и времени. Распределение землетрясений не является вполне случайным, что проявляется, в частности, в их пространственно-временном группировании. Анализ этого свойства сейсмического процесса требует способа выделения групп, независимого от априорных представлений о свойствах групп и основанного поэтому лишь на статистических закономерностях. Таким образом, встает задача выделения неслучайных скоплений в случайном поле точек. Естественно сравнивать реальное распределение точек с пуассоновским полем, в котором среднее число точек в единице объема постоянно. Мы будем считать группами такие плотные скопления точек, которые маловероятны в пуассоновском поле. Сначала рассмотрим многомерное поле точек, а затем конкретизируем задачу для различных графических способов представления сейсмичности — карты эпицентров землетрясений, пространственно-временного графика и пр.

Рассмотрим r -мерный объем V , в котором распределено N точек (плотность точек $\lambda = \frac{N}{V}$), причем вероятность попадания точки в элемент объема dV равна λdV (пуассоновское поле). Вероятность наличия n или более точек в некотором малом объеме v равна [5]

$$p(k \geq n/\lambda v) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda v)^n e^{-\lambda v}}{n!} \quad (1)$$

Задавшись некоторым малым значением вероятности p , найдем соответствующее критическое значение произведения λv

$$(\lambda v)_{кр} = c(n) = c_n. \quad (2)$$

Предполагая теперь «фон», на котором выделяются группы, пуассоновским с плотностью λ (что верно, если число групп невелико), можно считать группами все скопления из n точек, занимающие объем $v < v_{кр} = \frac{c_n}{\lambda}$. Заодно, конечно, выделяются и случайные максимумы плотности точек.

Оценим количество этих «ложных» групп. Число объемов, равных критическому, в полном объеме V равно:

$$M = \frac{\lambda v}{c_n} = \frac{N}{c_n}. \quad (3)$$

Ожидаемое число скоплений, выделенных в чисто пуассоновском поле

$$m_n(n; p) = \frac{pN}{c_n} \quad (4)$$

Зависимость отношения $\frac{m_n}{N}$ от n для $p=10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ изображена на рис. 1 (кривые 1, 2, 3). Видно, что график (в билогарифмическом масштабе) близок к линейному при $n > 2$. Исходя из этого, оценим полное число «ложных» групп, полагая для $n \neq 2$

$$\frac{m_n(n)}{N} = \text{const} \cdot n^k, \quad (5)$$

где k — угловой коэффициент прямых, аппроксимирующих полученное распределение. Приняв для кривой с $p=10^{-2}$ $k=1,5$ и для кривых с $p=10^{-3}$ и 10^{-4} $k=2,0$, получим следующие оценки сверху для величины

$$m_{\text{л сумм}} = \sum_{n=2}^{\infty} m_n(n):$$

$$\text{для } p = 10^{-2} \quad m_{\text{л сумм}} = 0,20 N,$$

$$\text{для } p = 10^{-3} \quad m_{\text{л сумм}} = 0,040 N,$$

$$\text{для } p = 10^{-4} \quad m_{\text{л сумм}} = 0,012 N.$$

Очевидно любой статистический критерий будет выделять из реального материала случайные максимумы плотности точек вместе с интересующими нас неслучайными «реальными» группами. Априорная вероятность последних неизвестна, но мы можем, применив критерий к реальному материалу, найти полное число «реальных» и «ложных» групп вместе $m_{\Sigma} = m_p + m_{\text{л}}$. Ожидаемое число «ложных» групп можно рас-

считать вышеописанным способом для каждого n и p . Кажется разумным потребовать, чтобы отношение $\frac{m_{\text{л}}}{m_{\Sigma}}$, определяющее «долю засорения» материала ложными группами, было постоянным для всех n . Это требование, вообще говоря, противоречит требованию независимости p от n . Выбрав постоянное p , мы можем лишь случайно угадать критерий, удовлетворяющий описанному требованию. Это может произойти при подобии распределений «реальных» и «ложных» групп. Фактически при заданном p распределение групп по численности хорошо описывается функциями вида:

$$p(n) = \text{const} \cdot n^k, \quad (6)$$

где k порядка 2. Например, линия 6 графика с наклоном 2, 1 представляет собой аппроксимацию реального распределения при $p=0,0001$. Сравнение с кривой 2 показывает, что отношение $\frac{m_{\text{л}}}{m_{\Sigma}}$ зависит от

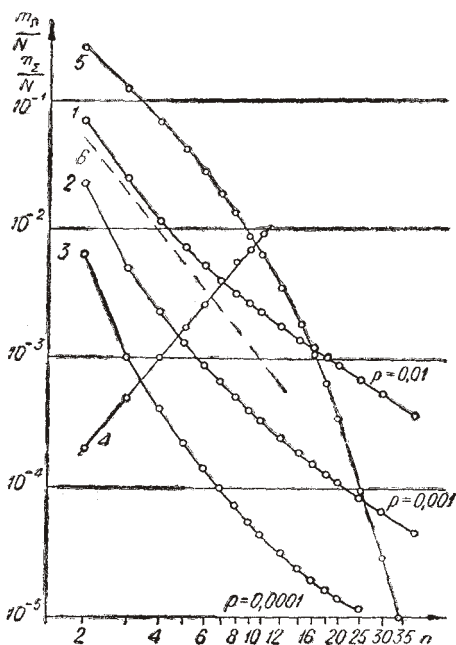


Рис. 1.

1, 2, 3 — распределения относительного числа «ложных» групп для предлагаемого критерия при $p=0,01; 0,001; 0,0001$; 4 — то же, для критерия, предложенного в [3]; 5 — то же, для критерия, использованного в [2]; 6 — пример распределения относительного числа групп, выделенных из реального материала. n — число землетрясений в группе.

$n \left(\frac{m_n}{m_y} = 0,25 \div 0,4 \right)$. В первом приближении такие вариации можно считать приемлемыми.

При необходимости можно, видимо, построить критерий с $\frac{m_n}{m_y}$, независимым от n , для любого реального распределения групп по численности и любого заданного значения a этого отношения. Пусть по некоторому критерию (т. е. набору c_n) получен набор величин m_n . Выбирая $m_n = dm_y$, можно рассчитать новые критические значения c_n из уравнения

$$p(k \leq n/c_n) = \frac{m_n(n)}{N} c_n \quad (7)$$

Повторив выделение групп с полученным критерием, получим новый набор m_n и снова рассчитаем c_n . По-видимому, такая процедура сходится достаточно быстро. Подобным образом можно рассчитать набор c_n и для любого другого набора m_n , не обязательно независимого от n .

В приведенном примере приблизительно каждая третья из выделенных групп — ложная. Можно попытаться применить более жесткий критерий (с меньшим p). Однако при этом возрастет число пропущенных неслучайных групп, хотя отношение $\frac{m_n}{m_y}$ и уменьшится. Отсюда ясно, что выбор критерия не всегда очевиден и зависит от задачи исследования. Если нужно выделить максимальное число неслучайных групп, идя на риск «засорения» материала случайными скоплениями, то нужно выбирать p достаточно большой. При малых p «засорение» материала меньше, но за счет его неполноты (m_p убывает с p).

Следует отметить, что, вообще говоря, возможно и обратное отношение $\frac{m_n}{m_y} > 1$, которое будет указывать на «взаимное отталкивание» точек.

Критические значения c_n и c_n^* для $p=0,01; 0,001; 0,0001$

n	c_n			c_n^*		
	0,01	0,001	0,0001	0,01	0,001	0,0001
0				4,60	6,91	9,21
1				6,64	9,23	11,8
2	0,150	0,045	0,014	8,41	11,2	13,9
3	0,435	0,190	0,090	10,0	13,0	15,9
4	0,823	0,425	0,237	11,6	14,8	17,7
5	1,28	0,740	0,435	13,1	16,5	19,6
6	1,78	1,11	0,710	14,6	18,1	21,2
7	2,33	1,52	1,02	16,0	19,6	23,0
8	2,90	1,97	1,34	17,4	21,2	24,6
9	3,50	2,45	1,77	18,8	22,7	26,1
10	4,13	2,96	2,20	20,1	24,1	27,8
12	5,42	4,04	3,10	22,8	27,0	30,8
14	6,68	5,20	4,10	25,5	29,9	35,8
16	8,18	6,40	5,10	28,0	32,6	36,9
18	9,62	7,66	6,30	30,6	35,4	39,5
20	11,08	8,96	7,20	33,1	38,0	42,5
25	14,85	12,34	10,5	39,3	44,8	49,9
30	18,74	15,86	13,8	45,4	51,8	56,0
40	26,77	23,26	—	—	—	—

На рис. 1 нанесено также относительное число «ложных» групп для критериев, взятых из работ [3] — кривая 4 и [2] — кривая 6. Эти критерии кажутся менее удовлетворительными.

Значения c_n для разных p , полученные интерполяцией таблиц [1], приведены в таблице. Там же приведены критические значения c_n^* для выделения неслучайных минимумов плотности точек. Эта задача может быть решена аналогичным образом, но подробно она не рассматривается.

Выясним теперь, какой объем v приписывать заданному скопленю. В одномерном случае можно попытаться взять

$$v^{(1)} = \Delta x; \Delta x = \max |x_i - x_k|, \quad (8)$$

где $x_i, (x_k)$ — координата i -ой (k -ой) точки. Но среднее значение этой величины равно $\frac{n-1}{\lambda}$, в то время как интервал, приходящийся на одну точку, равен в среднем $\frac{1}{\lambda}$. Поэтому выбираем в качестве эффективного объема в одномерном случае

$$v^{(1)} = \left(\frac{n}{n-1}\right) \Delta x, \quad (9)$$

r -мерным обобщением этой величины служит

$$v^{(r)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^r \prod_{i=1}^r \Delta x^{(i)}. \quad (10)$$

Выбирая таким образом, для простоты, параллелепипед вместо r -мерного многогранника, натянутого на группу точек, мы не сделаем в случае изометрической области большой ошибки. Если все координаты — пространственные, возможна и более точная оценка. Именно, следует оценивать эффективный объем по диаметру скопления

$$D = \max R(x_i; x_k), \quad (11)$$

где $R(x_i; x_k)$ — расстояние между точками x_i и x_k . Только эту величину можно использовать при $n \leq r$, когда объем натянутого на точки многогранника равен нулю. Однако такой способ оценки v нельзя использовать, если одна из координат — время. Расстояние в этом случае не определено. Поэтому приходится принимать компромиссное решение. Окончательно получаем в качестве оценок эффективного объема для разных комбинаций координат:

1. Координаты $x^{(1)}; x^{(2)}$ — карта эпицентров: $v_{\text{эфф}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \frac{\pi D^2}{4}$.

2. Координаты $x; t$ — пространственно-временной график:

$$v_{\text{эфф}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \Delta x \Delta t.$$

3. Координаты $x^{(1)}; x^{(2)}; t$ — карта с учетом времени: $v_{\text{эфф}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^3 \times \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta t$.

4. Координаты $x^{(1)}; x^{(2)}; x^{(3)}; t$ — карта с учетом времени и глубины: $v_{\text{эфф}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^4 \frac{\pi D^3}{6} \cdot \Delta t$.

При обработке реальных данных следует учитывать их точность.

Перейдем теперь к оценке λ . Заметим, что в соответствии с [4], плотность землетрясений класса k и выше связана с сейсмической активностью по классу k_0 зависимостью вида

$$\lambda_k = A_{k_0} \frac{10^{(k_0 - k) \cdot \tau}}{1 - 10^{-\tau}}. \quad (12)$$

Это утверждение является вполне строгим, если активность стационарна, а ее оценки — точны. Фактически локальные значения A получаются осреднением экспериментальных данных по определенным пространственно-временным областям (площадка осреднения и период, за который составляется карта). При этом некоторое скопление точек может рассматриваться как группа или как локальный (временный) максимум активности в зависимости от масштаба осреднения.

Чтобы задача выделения групп имела какой-то смысл, пространственный и временной масштаб выделенных групп должен быть заметно меньше этого масштаба.

Итак, мы ограничиваемся выделением достаточно мелких максимумов поля сейсмичности. При этом можно использовать [12] для нахождения локальной пуассоновской плотности.

Если доля группирующихся землетрясений велика, возникает другая сложность. Отклонения от пуассоновского закона при этом существенны и априори неизвестны. В этой ситуации предлагаемый метод является лишь более или менее удобным рецептом. Эффект засорения можно оценить лишь в некоторых специальных случаях.

Пусть qN землетрясений составляют «реальные» группы, объем которых пренебрежим по сравнению с V , а вне этих групп распределение пуассоново. По аналогии с [4] получаем, что число «ложных» групп

$$m_n = (1 - q) \frac{p N}{c_n(p)}. \quad (13)$$

Таким образом, эффект «засорения» будет ослаблен. Можно ожидать, что и в общем случае оценки (4) будут справедливы по порядку величины.

Если в группе мало относительно слабых землетрясений, она может не выделяться, если использовать λ , рассчитанную по самому слабому надежно регистрируемому классу K . Переход к $K+1$, $K+2$ и т. д. позволяет и в этом случае иногда выделить группу.

Для упрощения работы по выделению групп была составлена номограмма, предназначенная для выделения групп по карте эпицентров с учетом распределения землетрясений во времени (случай 3). Учет глубины, вообще говоря, необходим, и не производится из-за технических трудностей. Именно, для выделения групп в случае 4 необходима объемная плотность точек (объемная активность). Эту величину трудно представить в удобном для работы виде. Но если даже она известна, градиент плотности по глубине настолько велик, что использовать для расчета, например, локальную активность в центре группы нельзя, и необходимо осреднение по объему группы. А эта процедура, сама по себе не простая, осложняется еще большей случайной ошибкой определения глубины. Все это привело к отказу от формального учета глубины. При интерпретации результатов следует иметь в виду возможность ошибок, связанную с этим упрощением.

Номограмма (рис. 2) предназначена для проверки условия

$$c_n \geq \left(\frac{n}{n-1} \right)^3 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \Delta t \cdot \lambda \quad (14)$$

(см. (2)) или, что удобнее для построения

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{n-1}{n} \right)^3 c_n \cong D^2 \cdot \Delta t \cdot \lambda. \quad (15)$$

При необходимости можно использовать $\Delta x^{(1)} \cdot \Delta x^{(2)}$ вместо D^2 в соответствии с формулой

$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{n-1}{n} \right)^3 c_n \cong \Delta x^{(1)} \cdot \Delta x^{(2)} \cdot \Delta t \cdot \lambda. \quad (16)$$

Исходные данные $\Delta x^{(1)}$, $\Delta x^{(2)}$, Δt , λ , n отмечаются на осях L_1 , L_2 , T , λ , n соответственно (точки A , B , C , D , E схемы). Если используется диаметр

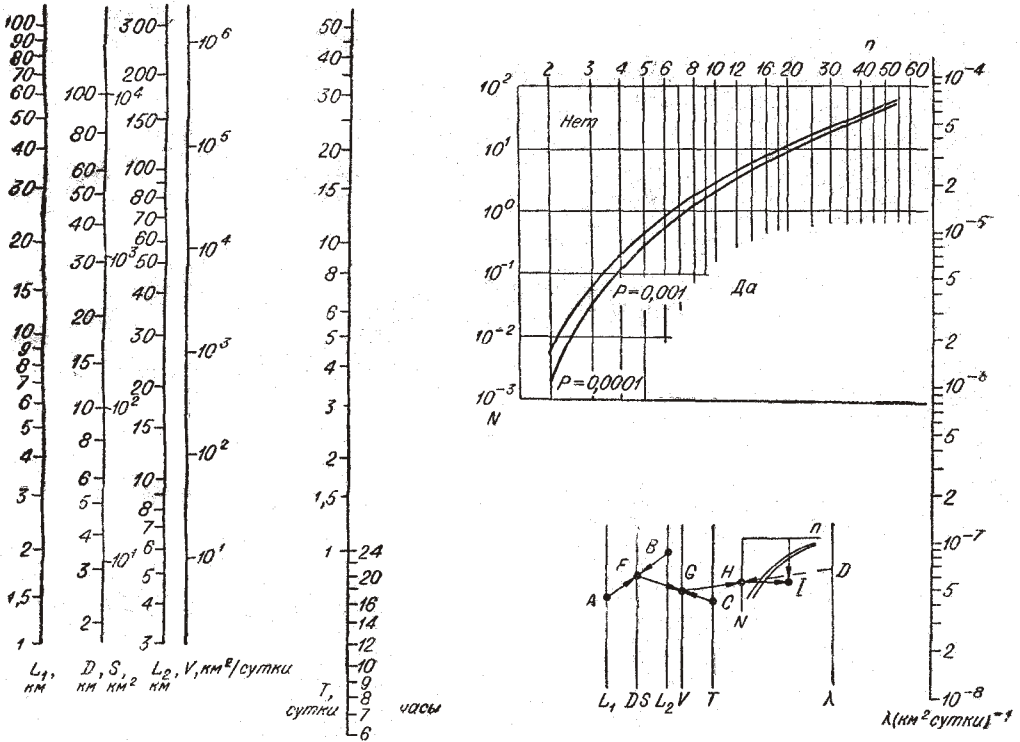


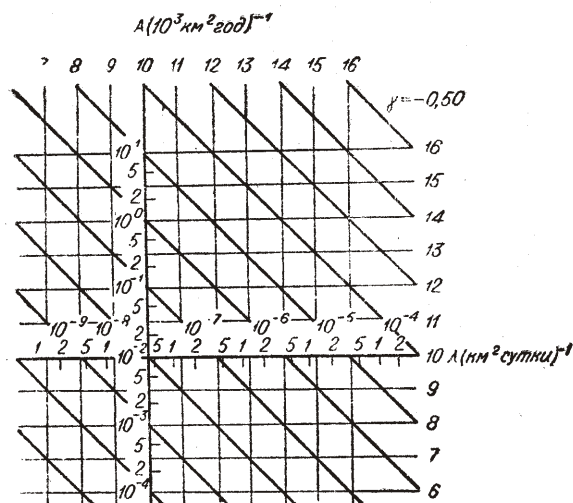
Рис. 2. Номограмма для проверки наличия группы.

D , он отмечается на оси DS в соответствии с левой оцифровкой. Пересечение линии AB с осью DS дает точку F (в первом случае эта точка наносится по D). Соединяя F с C , получаем точку G на оси V , соединяя G с D , получаем точку H на оси N , используя E и H как координаты точки I , принимаем решение в соответствии с тем, выше или ниже кривой расположена точка I . Кривые проведены для $p=0,001$ и $p=0,0001$.

Поясним устройство номограммы. Масштаб по всем шкалам логарифмический. Шкалы L_1 , L_2 , D , T имеют одинаковый модуль M , шкалы S , λ — модуль $M/2$, шкала V — модуль $M/3$, шкала N — модуль $M/6$. Модуль шкалы n произволен. Расстояния между вертикальными шкалами находятся в следующих соотношениях:

$$\frac{L_1 S}{S L_2} = 1; \quad \frac{S V}{V T} = \frac{1}{2}; \quad \frac{V N}{N \lambda} = \frac{2}{3}.$$

Для пересчета значений A_{10} ($10^3 \text{ км}^2 \cdot \text{год}$)⁻¹ в значения λ_k ($\text{км}^2 \cdot \text{сутки}$)⁻¹ служит дополнительная номограмма (рис. 3). Она построена для наклона графика повторяемости $\gamma = 0,5$, что является средней величиной для Камчатки при использовании энергетических классов С. А. Федотова K_{Φ}^{68} . Отыскав значение A_{10} на вертикальной шкале «10», движемся вдоль наклонных линий до пересечения с горизонтальной линией K . Отсчет λ_k снимается против этой точки по горизонтальной шкале «10». Подобным образом пересечение проведенной наклонной линии с вертикальной линией K и отсчет по вертикальной шкале «10» позволяет попутно найти значения A_k . Если γ отличается заметным образом



мыслим, что это не так. Если γ отличается заметным образом от принятого в номограмме, наклон косых линий нужно соответственно изменить.

Рис. 3. Номограмма для пересчета активности в плотность эпицентров.

от принятого в номограмме, наклон косых линий нужно соответственно изменить.

Приведем пример использования номограммы. Рассмотрим последовательность землетрясений долины р. Камчатки:

№	Дата	ч.	мин.	с	Н	λ	φ	K
1	7.6.1965	01	45	40,1	20—60	161°57'	56°04'	10
2	6.7.1965	07	43	22,1	10—20	161°24'	56°18'	11
3	6.7.1965	07	53	35,0	20	161°25'	56°18'	10
4	24.7.1965	02	46	13,0	0—10	162°49'	56°16'	10
5	25.7.1965	03	03	49,7	10—60	162°30'	56°13'	10
6	29.7.1965	13	09	29,8	0—10	159°26'	56°22'	9
7	11.8.1965	23	41	14,6	0—20	161°30'	56°24'	9
8	15.8.1965	16	50	41,1	0	162°45'	56°18'	10
9	24.8.1965	21	40	36,8	0—20	162°07'	56°11'	10
10	31.8.1965	03	47	05,2	0—10	162°41'	56°19'	10

Активность в этом районе составляет около $0,5 \cdot 10^{-3}$ ($\text{км}^2 \cdot \text{год}$)⁻¹, она получена обработкой годовой карты эпицентров с площадкой осреднения $75 \times 150 \text{ км}^2$. Глубины землетрясений близки. По номограмме рис. 3 получаем $\lambda_{10} = 2 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_9 = 6 \cdot 10^{-6}$. При просмотре карты эпицентров можно предположить неслучайность для следующих серий землетрясений:

	T	D, км	D', км	λ	n
1. № 2, 3	10 мин	20	1	$\lambda_{10} = 2 \cdot 10^{-6}$	2
2. № 2, 3, 7	36 сут	20	12	$\lambda_9 = 6 \cdot 10^{-6}$	3
3. № 4, 5	1 »	20	20	$\lambda_{10} = 2 \cdot 10^{-6}$	2
4. № 4, 5, 8, 10	37 »	20	20	$\lambda_{10} = 2 \cdot 10^{-6}$	4

Через D обозначено используемое, а через D' — «фактическое» (т. е. полученное по приведенным выше координатам) максимальное расстояние между событиями серий. Замена связана с тем, что точность определения координат в рассматриваемом районе порядка 15 км.

Выполнив построения на номограмме, получим следующие результаты. Серия 1 — очевидная группа, это подтверждается на очень высоком уровне вероятности. Серия 2 включает еще одно землетрясение 9 класса, поэтому используем λ_9 . В этом случае гипотеза отвергается даже при $p=0,001$. Серии 3 и 4 являются группами при $p=0,0001$. Таким образом, пара 2, 3 и четверка 4, 5, 8, 10 являются группами.

Автор выражает признательность А. А. Годзиковской за графические построения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.
2. Виноградов Ю. В., Мирзоев К. М. Группировка упругих импульсов при разрушении образцов из неоднородных материалов. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, 1968, № 7.
3. Гайский В. Н. Об определении повторяемости землетрясений с помощью карт сейсмической активности. Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, 1967, № 6.
4. Ризниченко Ю. Н. О методе суммирования для изучения сейсмической активности. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1964, № 7.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. «Мир», 1967.

*Тихоокеанская сейсмическая
экспедиция ИФЗ АН СССР,
Петропавловск-Камчатский*

*Статья поступила в редакцию
2 июня 1969 г.*